Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 19/04/19

1 Ancora spazi vettoriali e applicazioni lineari

1. Sia $V = \mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi:
   $S = \{M \in V : M^T = M\}$;
   $A = \{M \in V : M^T = -M\}$;
   $B = \{M \in V : M \text{ è } \textit{triangolare superiore}\}$;
   $T = \{M \in V : Tr(M) = 0\}$.

   i) Si dimostri che S, A, B, T sono sottospazi vettoriali e si esibisca una base per ciascuno di essi. Qual'è la loro dimensione?

   ii) Esibire una base di $B \cap T$, $B \cap S$;

   iii) Si dimostri che la somma $S + A$ è diretta;

   iv) Si verifichi che B è chiuso per la composizione mentre gli altri non lo sono; (*Ovvero mostrare che* $M, N \in B \Rightarrow MN \in B$);

   v) Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
   Scrivere le coordinate di M rispetto alle basi di S e T scelte;

   vi) Si trovi una matrice $M \in V$ tale che $M^2 = 0$.
   (*Suggerimento: si cerchi una tale* M *in* B)

   vii) Si trovi una matrice $M \in V$ tale che $M^2 = -I$ (dove I è la matrice identità).
   (*Suggerimento: si cerchi una tale* M *in* A)

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f_a(p(x)) = (p(-1), p(a), p(1))$. Stabilire per quali valori di a l'applicazione è un isomorfismo.

3. Trovare una matrice $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema lineare $Ax = b$ sia compatibile e il sistema lineare $A^T x = b$ non lo sia.

4. Si considerino le applicazioni lineari $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ definite da

   $F_1(e_1) = 3e_1+3e_2+2e_3$, $F_1(e_2) = 2e_1+5e_2-7e_3$, $F_1(e_3) = 4e_1-e_2+11e_3$;
   $F_2(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $F_2(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 6e_3$, $F_2(e_3) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3$;
   $F_3(e_1) = e_1 + 11e_3$, $F_3(e_2) = 2e_1 - 4e_2$, $F_3(e_3) = -3e_1 + 2e_2$;

   i) Scrivere le matrici associate nella base standard di $\mathbb{R}^3$;

   ii) Determinare una base ortonormale dei nuclei e delle immagini di ognuna di esse.

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
   consideriamo l'insieme $W = \{X \in \mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R}) : AX = 0\}$.

   i) Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R})$ e si calcoli la dimensione. Esibire infine una base di W.

   ii) Si generalizzi il punto i): data $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$, qual'è la dimensione di $W = \{X \in \mathcal{M}(n, p; \mathbb{R}) : AX = 0\}$?

6. Si consideri il seguente insieme
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   i) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R})$, calcolarne la dimensione ed esibire una base;

   ii) Dimostrare che ogni $A \in V$ con $A \neq 0$ è invertibile;

   iii) Sia $j \in \mathbb{C}$ tale che $j^2 = -1$.
   Dato $z \in \mathbb{C}$, considerare l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $f_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f_z(w) = zw$. Scrivere la matrice associata a f_z nella base $1, j$ nel dominio e nel codominio;

   iv) Sia A_z la matrice ottenuta al punto iii), verificare che $A_z A_w = A_{zw}$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;

   v) Sia $A \in V$ tale che $det(A) = 1$.
   Verificare che esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   e calcolare A^{-1}, A^n, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   Suggerimento: usare il punto iv)

2 Determinanti

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

   i) Calcolare il determinante di A e B usando sia l'algoritmo di Gauss che lo sviluppo di Laplace;

   ii) Verificare il teorema di Binet: $det(AB) = det(A)det(B)$.

2. Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta invertibile.

4. Sia $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ una matrice della forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

   con $B \in \mathcal{M}(h, h; \mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}(n-h, n-h; \mathbb{R})$, dove $0 < h < n$.
   Dimostrare che $det(A) = det(B)det(D)$.
   Suggerimento: Fare prima il caso in cui o B o D è diagonale. Per il caso generale osservare che se B è invertibile allora

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-h} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_h & B^{-1}C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

5. Sia $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ e $1 \leq i, j \leq n$.

   (a) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{jk}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ det(A), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

(b) La *matrice cofattore* di A, denotate con $Cof(A)$ è la matrice che ha come entrata (i, j) il numero $(-1)^{i+j} det(A_{ji})$.
Dimostra che $A \cdot Cof(A) = det(A) I_n$.
(Notate che se A è invertibile allora $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} Cof(A)$)

(c) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$