Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 19/04/19

1 Ancora spazi vettoriali e applicazioni lineari

1. Sia $V = \mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi:
   $S = \{M \in V : M^T = M\}$;
   $A = \{M \in V : M^T = -M\}$;
   $B = \{M \in V : M \text{ \emph{è triangolare superiore}}\}$;
   $T = \{M \in V : Tr(M) = 0\}$.

   i) Si dimostri che S, A, B, T sono sottospazi vettoriali e si esibisca una base per ciascuno di essi. Qual'è la loro dimensione?

   ii) Esibire una base di $B \cap T$, $B \cap S$;

   iii) Si dimostri che la somma $S + A$ è diretta;

   iv) Si verifichi che B è chiuso per la composizione mentre gli altri non lo sono; (*Ovvero mostrare che* $M, N \in B \Rightarrow MN \in B$);

   v) Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
   Scrivere le coordinate di M rispetto alle basi di S e T scelte;

   vi) Si trovi una matrice $M \in V \setminus \{0\}$ tale che $M^2 = 0$.
   (*Suggerimento: si cerchi una tale M in B*)

   vii) Si trovi una matrice $M \in V$ tale che $M^2 = -I$ (dove I è la matrice identità).
   (*Suggerimento: si cerchi una tale M in A*)

   Soluzione.

   i) Il fatto che siano sottospazi è ovvio e una base di ciascuno di essi è data da
   $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
   $\mathcal{B}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\mathcal{B}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
$\mathcal{B}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Le dimensioni sono dunque tutte uguali a 3;

ii) Una base di $B \cap T$ è data $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ mentre $B \cap S$ sono le matrici diagonali e una base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

iii) Dobbiamo far vedere che $S \cap A = 0$. Sia $x \in S \cap A$, allora $x = x^t = -x$, dunque $2x = 0$, cioè $x = 0$;

iv) Che B sia chiuso per composizione è ovvio, mentre S e A non lo sono perchè, ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine neanche T lo è in quanto, ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

;

v) Le coordinate di M nella base $\mathcal{B}_S$ sono $(2, 1, -2)$, mentre le coordinate nella base $\mathcal{B}_T$ sono $(2, 1, 1)$;

vi) Ad esempio $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

vii) Ad esempio $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f_a(p(x)) = (p(-1), p(a), p(1))$. Stabilire per quali valori di a l'applicazione è un isomorfismo.

   Soluzione. Basta controllare quando è iniettiva: $p(-1) = p(a) = p(1) = 0$ se e solo se $-1, a, 1$ sono zeri del polinomio p. Se $a \neq \pm 1$ allora questo è possibile sse $p = 0$, poichè p ha grado al più 2. Se $a = \pm 1$ abbiamo un elemento non nullo del nucleo, ad esempio $p(x) = x^2 - 1$, dunque f_a è un isomorfismo sse $a \neq \pm 1$.

3. Trovare una matrice $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema lineare $Ax = b$ sia compatibile e il sistema lineare $A^T x = b$ non lo sia.

   Soluzione. Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Si considerino le applicazioni lineari $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ definite da

$F_1(e_1) = 3e_1+3e_2+2e_3$, $F_1(e_2) = 2e_1+5e_2-7e_3$, $F_1(e_3) = 4e_1-e_2+11e_3$;
$F_2(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $F_2(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 6e_3$, $F_2(e_3) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3$;
$F_3(e_1) = e_1 + 11e_3$, $F_3(e_2) = 2e_1 - 4e_2$, $F_3(e_3) = -3e_1 + 2e_2$;

i) Scrivere le matrici associate nella base standard di $\mathbb{R}^3$;

ii) Determinare una base ortonormale dei nuclei e delle immagini di ognuna di esse.

Soluzione.

i) $F_1 : \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -7 & 11 \end{pmatrix}$, $F_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $F_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

ii) Vediamo che F_1, F_3 sono isomorfismi, dunque il loro nuckeo è composto dal solo vettore nullo (che non ha una base) e la loro immagine è $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo prendere $\{e_1, e_2, e_3\}$ come base ortonormale. F_2 invece ha come nucleo $span\{3e_1 - e_3\}$ dunque una sua base ortonormale è data dal vettore $\frac{3}{\sqrt{10}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}e_3$. L'immagine di F_3 ha come base le prime due colonne della sua matrice rappresentativa. Applicando il procedimento di *Gram-Schmidt* troviamo che una base ortonomale è data dai vettori di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
consideriamo l'insieme $W = \{X \in \mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R}) : AX = 0\}$.

i) Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(2, 2; \mathbb{R})$ e si calcoli la dimensione. Esibire infine una base di W.

ii) Si generalizzi il punto *i*): data $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$, qual'è la dimensione di $W = \{X \in \mathcal{M}(n, p; \mathbb{R}) : AX = 0\}$?

Soluzione.

i) W è sottospazio in quanto nucleo dell'applicazione lineare $X \mapsto AX$. Si vede subito che $(1, -2)$ genera il sottospazio $\{v \in \mathbb{R}^2 : Av = 0\}$, dunque un elemento generico di W è della forma $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -2\lambda & -2\mu \end{pmatrix}$, con λ, μ parametri reali. Concludiamo dunque che la dimensione di W è 2 e una sua base è data $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ii) Possiamo ragionare come al punto *i*) per una matrice quadrata A di ordine n qualunque. Concludiamo che $dim(W) = p(n - r)$, dove $r = rk(A)$.

6. Si consideri il seguente insieme

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

i) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(2,2;\mathbb{R})$, calcolarne la dimensione ed esibire una base;

ii) Dimostrare che ogni $A \in V$ con $A \neq 0$ è invertibile;

iii) Sia $j \in \mathbb{C}$ tale che $j^2 = -1$.
Dato $z \in \mathbb{C}$, considerare l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $f_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f_z(w) = zw$. Scrivere la matrice associata a f_z nella base $1, j$ nel dominio e nel codominio;

iv) Sia A_z la matrice ottenuta al punto *iii*), verificare che $A_z A_w = A_{zw}$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;

v) Sia $A \in V$ tale che $det(A) = 1$.
Verificare che esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e calcolare A^{-1}, A^n, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Suggerimento: usare il punto iv)

Soluzione.

i) Una base è data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $dim(V) = 2$;

ii) Infatti, se $a, b \neq 0$, $det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$;

iii) Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il vettore delle coordinate di z rispetto alla base $1, j$. Si ha $f_z(1) = z = x + yj$ e $f_z(j) = zj = -y + xj$. Dunque la matrice cercata è $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

iv) Si ha $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}$ e riconosciamo che quest'ultima è la matrice che rappresenta la moltiplicazione per il numero complesso $(x + yj)(x' + y'j)$;
(Osserviamo che quello che abbiamo mostrato è che V è isomorfo a $\mathbb{C}$ come campo)

v) Se $det(A) = a^2 + b^2 = 1$ allora esiste un unico $\theta \in [0, 2pi)$ tale che $cos(\theta) = a, sin(\theta) = b$.
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ poichè, nella notazione del punto *iv*), $A^n = (A_{e^{j\theta}})^n$, che è uguale a $A_{e^{nj\theta}}$ per il punto *iv*).

2 Determinanti

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

   i) Calcolare il determinante di A e B usando sia l'algoritmo di Gauss che lo sviluppo di Laplace;

   ii) Verificare il teorema di Binet: $det(AB) = det(A)det(B)$.

   Soluzione. Si ha $det(A) = 72$, $det(B) = 96$.

2. Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Soluzione. Sviluppando nell'ordine lungo la seconda riga, lungo la quinta colonna e lungo l'ultima riga otteniamo $det(A) = -6det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$
   Sottraendo la terza riga dalla prima e sommandola alla quarta otteniamo $det(A) = -6\,det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -6\,det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Con lo sviluppo di Laplace o con il metodo di Gauss otteniamo che il determinante dell'ultima matrice 3×3 è uguale a -5. Dunque $det(A) = (-6)(-5) = 30$.

3. Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta invertibile.

   Soluzione. Questo è un caso in cui è preferibile procedere con gli sviluppi di Laplace, in quanto l'algoritmo di Gauss porterebbe a una serie di sottocasi scomodi da trattare. Cominciamo sviluppando lungo la prima riga e

poi sommando il doppio della terza colonna alla prima colonna del minore ottenuto
$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -1 & k & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$=-(1-3k)=3k-1.
Dunque A è invertibile sse $k \neq \frac{1}{3}$.

4. Sia $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ una matrice della forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

con $B \in \mathcal{M}(h, h; \mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}(n-h, n-h; \mathbb{R})$, dove $0 < h < n$.
Dimostrare che $det(A) = det(B)det(D)$.
Suggerimento: Fare prima il caso in cui o B o D è diagonale. Per il caso generale osservare che se B è invertibile allora

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-h} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_h & B^{-1}C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

Soluzione. Se $det(B) = 0$ allora anche $det(A) = 0$ poichè le prime h colonne di A sono linearmente dipendenti, in quanto lo sono le colonne di B. Il caso diagonale segue subito dallo sviluppo di Laplace rispetto le prime h colonne (o rispetto le ultime $n - h$ righe).
Infine concludiamo grazie al suggerimento (osservando che le matrici identità sono diagonali) e al teorema di Binet.

5. Sia $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ e $1 \leq i, j \leq n$.

   i) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{jk}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ det(A), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

   ii) La *matrice cofattore* di A, denotate con $Cof(A)$ è la matrice che ha come entrata (i, j) il numero $(-1)^{i+j} det(A_{ji})$.
   Dimostra che $A \cdot Cof(A) = det(A) I_n$.
   (Notate che se A è invertibile allora $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} Cof(A)$)

   iii) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

i) Se $i = j$ allora la formula coincide con lo sviluppo di Laplace rispetto alla $j-$esima riga. Se $i \neq j$ allora riconosciamo lo sviluppo di Laplace lungo la $j-$esima riga di una matrice avente la $j-$esima riga uguale alla $i-$esima riga e dunque il risultato è zero;

ii) Ovvio dal punto i);

iii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$