

Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria

a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 17/05/19

1 Geometria analitica nel piano e nello spazio

1. Tra tutte le rette parallele a $r : x - 2y = 0$ trovare quella che
 - i) Passa per il punto $P(1, -1)$;
 - ii) Ha distanza $\sqrt{5}$ dal punto $P(1, -1)$.
2. Data la retta in forma parametrica $r : (-t + 1, 2t + 3)$
 - i) Trova le equazioni cartesiane di r ;
 - ii) Determinare la retta perpendicolare a r passante per il punto $P(1, 1)$.
3. Quali sono i parametri direttori della retta $r : 2x + 3y - 1 = 0$?
4. Trovare le equazioni del piano π che contiene i punti $P_1(2, 3, 0)$, $P_2(3, 0, 2)$, $P_3(4, 3, 4)$.
5. Verificare che i punti $P_1(1, 1, 0)$, $P_2(1, 3, 7)$, $P_3(2, 4, 1)$, $P_4(3, 5, -5)$ sono coplanari e trovare le equazioni del piano π che li contiene.
6. Determinare il piano passante per l'origine e parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

7. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P(0, 1, 2)$ e contenente la retta di equazioni $x - 2y + 4z = 2x + y - z + 1 = 0$.
8. Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano α contenente la retta $r : x - 5z = y - 2z = 0$ e perpendicolare al piano $\beta : x + y + z = 0$.
9. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri il piano $\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e la retta r_a di equazioni parametriche $x_1 = t, x_2 = 2t + a, x_3 = (a^2 - a)t + 2a$. Determina al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'intersezione tra π e r_a . Esistono valori di a per cui $r_a \subset \pi$?

10. Determinare la proiezione ortogonale della retta $r : x - 3y + 4z = 2x + 5y - z = 0$ sul piano di equazione $3x - y + 7z = 0$.
11. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

e trovare l'intersezione tra tale retta e il piano $\pi : 4x + 6y + 2z = 0$.

12. Determinare i valori del parametro t per i quali i seguenti piani si incontrano in esattamente un punto: $(4 - t)y - 3z + 1 = 0, x + 2y - z = 0, 2y - (1 + t)z + 2 = 0$.
13. Trovare equazioni parametriche della retta $r = \alpha \cap \beta$, dove $\alpha : x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ e $\beta : (t, s, -2 - 2s)$.
14. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, denotiamo con $v \wedge w$ il loro prodotto vettoriale.
 - i) Mostrare con un esempio che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa e associativa;
 - ii) Verificare con un esempio che vale la formula

$$\langle x, y \wedge z \rangle = \det[xyz].$$

15. Dato $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$, consideriamo la seguente applicazione $f_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_x(v) = x \wedge v$.
 - i) Verificare che f_x è un' applicazione lineare e calcolare $\ker(f_x)$ e $\text{Im}(f_x)$;
 - ii) Verificare che la matrice che la rappresenta nella base standard è la seguente matrice antisimmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$