

Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 17/05/19

1 Geometria analitica nel piano e nello spazio

1. Tra tutte le rette parallele a $r : x - 2y = 0$ trovare quella che

- i) Passa per il punto $P(1, -1)$;
- ii) Ha distanza $\sqrt{5}$ dal punto $P(1, -1)$.

Soluzione.

- i) Il vettore normale alla retta è $\nu = (1, -2)$, dunque la retta è la seguente: $(x - 1) - 2(y + 1) = 0$, cioè $x - 2y - 3 = 0$.
- ii) Utilizziamo la formula della distanza punto-retta: $\sqrt{5} = \frac{|1 - 2(-1) + c|}{\sqrt{5}}$
che dà come soluzioni $c = -2, c = -4$. Le rette che stiamo cercando sono $x - 2y - 2 = 0$ oppure $x - 2y - 4 = 0$.

2. Data la retta in forma parametrica $r : (-t + 1, 2t + 3)$

- i) Trova le equazioni cartesiane di r ;
- ii) Determinare la retta perpendicolare a r passante per il punto $P(1, 1)$.

Soluzione.

- i) Abbiamo $t = 1 - x$ e andando a sostituire nella seconda equazione: $y = 2(1 - x) + 3$, cioè $y = -2x + 5$.
- ii) Il vettore direttore della retta è $(-1, 2)$ e quindi il vettore normale alla retta è $(2, 1)$. La retta cercata è quindi $2(x - 1) + (y - 1) = 0$ cioè $2x + y - 3 = 0$

3. Quali sono i parametri direttori della retta $r : 2x + 3y - 1 = 0$?

Soluzione. $v = (3, -2)$

4. Trovare le equazioni del piano π che contiene i punti $P_1(2, 3, 0), P_2(3, 0, 2), P_3(4, 3, 4)$.

Soluzione. L'equazione cartesiana del fascio di piani passanti per P_1 è $a(x - 2) + b(y - 3) + cz = 0$, dove $n = (a, b, c)$ è normale al piano. Osserviamo che i vettori $v_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_1 P_3}$ appartengono al piano π e sono linearmente indipendenti, ovvero costituiscono una giacitura per il piano. Il loro prodotto vettoriale $n = v_1 \wedge v_2$ sarà dunque normale al piano:

$$n = v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\pi : 3(x - 2) + (y - 3) = 0$.

5. Verificare che i punti $P_1(1, 1, 0), P_2(1, 3, 7), P_3(2, 4, 1), P_4(3, 5, -5)$ sono complanari e trovare le equazioni del piano π che li contiene.

Soluzione. I punti sono complanari se e solo se il rango della matrice

$$\left(\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3}, \overrightarrow{P_1 P_4} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

è minore o uguale a 2, cosa che si può verificare facilmente notando che il suo determinante è nullo.

Il piano ha equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'ultima equazione i parametri t e s trovati a partire dalle prime due equazioni, troviamo le equazioni cartesiane: $\pi : 19x - 7y + 2z - 12 = 0$.

6. Determinare il piano passante per l'origine e parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. I vettori direttori delle rette sono $v_r = (1, 0, -2) \wedge (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$ e $v_s = (1, 0, -3) \wedge (0, 1, 2) = (3, -2, 1)$ e ovviamente costituiscono una giacitura per il piano, che ha dunque equazioni parametriche $\mathbf{x} = \lambda v_r + \mu v_s$. Le sue equazioni cartesiane si possono trovare calcolando il vettore normale $n = v_r \wedge v_s = (1, 1, -1)$. Troviamo dunque $x + y - z = 0$.

7. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P(0, 1, 2)$ e contenente la retta di equazioni

$$x - 2y + 4z = 2x + y - z + 1 = 0.$$

Soluzione. Sia v un vettore direttore della retta e Q un punto appartenente ad essa, allora $n = v \wedge \overrightarrow{PQ}$ è un vettore normale al piano che stiamo cercando. Abbiamo $v = (-2, 9, 5)$ e prendendo ad esempio $Q(0, -2, -1)$ come punto appartenente alla retta, troviamo $n = (-12, -6, 6)$. Infine il piano cercato è $-2x - (y - 1) + (z - 2) = 0$.

8. Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano α contenente la retta $r : x - 5z = y - 2z = 0$ e perpendicolare al piano $\beta : x + y + z = 0$.

Soluzione. Ragioniamo come prima, sia v_r un vettore direttore della retta (per esempio $(5, 2, 1)$) e n_β un vettore normale al piano (prendiamo ovviamente $(1, 1, 1)$), allora v_r, n_β sono la giacitura di un piano ortogonale a β che contiene r , ovvero una giacitura di α . Siccome $O \in r$, le equazioni parametriche di α sono

$$\mathbf{x} = \lambda v_r + \mu n_\beta = \begin{pmatrix} 5\lambda + \mu \\ 2\lambda + \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

mentre per trovare quelle cartesiane calcoliamo $n_\alpha = v_r \wedge n_\beta = (1, -4, 3)$. Dunque $\alpha : x - 4y + 3z = 0$.

9. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri il piano $\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e la retta r_a di equazioni parametriche $x_1 = t, x_2 = 2t + a, x_3 = (a^2 - a)t + 2a$. Determina al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'intersezione tra π e r_a . Esistono valori di a per cui $r_a \subset \pi$?

Soluzione. Sostituendo le equazioni parametriche di r_a nelle equazioni cartesiane di π e sviluppando i calcoli otteniamo $(a^2 - a)t + a = 0$. Se $a^2 - a \neq 0$ allora esiste un'unica soluzione $t = \frac{1}{1 - a}$, che corrisponde a un unico punto di intersezione $P_a = \left(\frac{1}{1 - a}, \frac{a^2 - a - 2}{a - 1}, a \right)$, mentre se $a = 1$, l'equazione diventa $1 = 0$ che non è mai verificata, quindi il piano e la retta sono paralleli. Infine per $a = 0$ troviamo $0 = 0$ e dunque l'equazione è verificata per tutti i valori di t , cioè $r_a \subset \pi$.

10. Determinare la proiezione ortogonale della retta $r : x - 3y + 4z = 2x + 5y - z = 0$ sul piano di equazione $3x - y + 7z = 0$.

Soluzione. Il vettore direttore della retta è $v_r = (1, -3, 4) \wedge (2, 5, -1) = (-17, 9, 11)$. Si vede facilmente che la proiezione ortogonale di r si ottiene intersecando il piano dato con il piano ortogonale a lui e contenente r . Un versore normale a quest'ultimo piano è $n = (-17, 9, 11) \wedge (3, -1, 7) = (74, 152, -10)$ che ha dunque equazione $74x + 152y - 10z = 0$. Dunque le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale di r sono

$$\begin{cases} 3x - y + 7z = 0 \\ 74x + 152y - 10z = 0 \end{cases}$$

11. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

e trovare l'intersezione tra tale retta e il piano $\pi : 4x + 6y + 2z = 0$.

Soluzione. Un vettore direttore è $v_r = (1, -1, 1) \wedge (1, 1, -5) = (4, 6, 2)$ mentre se sostituiamo $z = 0$ nell'equazione troviamo che $(-3, 1, 0) \in r$, dunque le equazioni parametriche sono $\mathbf{x} = (-3, 1, 0) + t(2, 3, 1)$ (che si può esplicitare come $x = -3 + 2t, y = 1 + 3t, z = t$). Sostituendo nell'equazione di π troviamo $28t - 6 = 0$, che da quindi il punto $(-18/7, 23/14, 3/14)$.

12. Determinare i valori del parametro t per i quali i seguenti piani si incontrano in esattamente un punto: $(4 - t)y - 3z + 1 = 0, x + 2y - z = 0, 2y - (1 + t)z + 2 = 0$.

Soluzione. Il sistema ha un'unica soluzione per ogni $t \neq 1, 2$.

13. Trovare equazioni parametriche della retta $r = \alpha \cap \beta$, dove $\alpha : x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ e $\beta : (t, s, -2 - 2s)$.

Soluzione. Deve essere $t - 2s - 3 = 0$, dunque $r = \alpha \cap \beta$ ha equazioni parametriche $\begin{pmatrix} 2s + 3 \\ s \\ -2 - 2s \end{pmatrix}$.

14. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, denotiamo con $v \wedge w$ il loro prodotto vettoriale.

- i) Mostrare con un esempio che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa e associativa;
- ii) Verificare con un esempio che vale la formula

$$\langle x, y \wedge z \rangle = \det[xyz].$$

Soluzione. Gli esempi sono immediati, la commutatività non vale perchè $v \wedge w = -w \wedge v$, così come non vale l'associatività in quanto $(v \wedge v) \wedge w = 0 \wedge w = 0$ per ogni v, w , mentre $v \wedge (v \wedge w) \neq 0$ se $w \neq 0$ è indipendente da v .

Dimostriamo la formula: $y \wedge z = (a, b, c)$ con a, b, c determinanti con segno delle tre sottomatrici di $[yz]$. Ma allora $ax_1 + bx_2 + cx_3$ è lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

15. Dato $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$, consideriamo la seguente applicazione $f_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_x(v) = x \wedge v$.

- i) Verificare che f_x è un' applicazione lineare e calcolare $\ker(f_x)$ e $\operatorname{Im}(f_x)$;
- ii) Verificare che la matrice che la rappresenta nella base standard è la seguente matrice antisimmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

- i) $f_x(\lambda v + \mu w) = x \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda x \wedge v + \mu x \wedge w = \lambda f_x(v) + \mu f_x(w)$.
Sappiamo che $x \wedge v = 0$ se e solo se v è multiplo di x , cioè $\ker(f_x) = \operatorname{span}\{x\}$. Sappiamo inoltre che $x \wedge v \in \operatorname{span}\{x\}^\perp$, cioè $\operatorname{Im}(f_x) \subset \operatorname{span}\{x\}^\perp$. In effetti l'immagine è proprio uguale a $\operatorname{span}\{x\}^\perp$ perchè se restringiamo f_x a questo sottospazio, otteniamo un endomorfismo iniettivo, per quanto detto prima, dunque anche suriettivo.
- ii) $x \wedge e_1 = (0, x_3, -x_2), x \wedge e_2 = (-x_3, 0, x_1), x \wedge e_3 = (x_2, -x_1, 0)$.