Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 12/04/19

1 Indipendenza lineare e dimensione di spazi vettoriali

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare definita da
   $f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + z, 4x + 3y + 5z)$.
   Calcolare una base per $\ker(f)$, $R(f)$ e le rispettive dimensioni.

2. Dato $V = \mathbb{R}^3$, consideriamo i sottospazi $U = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
   e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
   Determinare la dimensione e una base per ognuno dei seguenti sottospazi: U, W, $U \cap W$. Verificare che $V = U + W$.

3. Sia $t \in \mathbb{R}$, consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:
   $u_t = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2(1+t) \end{pmatrix}$, $v_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix}$, $x_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$

   i) Determinare per quali valori del parametro t, si ha $x_t \in span_{\mathbb{R}}\{u_t, v_t, w_t\}$;
   ii) Per tali valori di t, scrivere x_t come combinazione lineare di u_t, v_t, w_t.

4. Sia $V = \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici a coefficienti reali 2×2. Consideriamo i seguenti vettori di V:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   i) Calcolare la dimensione e una base di $span_{\mathbb{R}}\{A, B, C, D\}$;
   ii) Siano $U = span_{\mathbb{R}}\{A, B\}$ e $W = span_{\mathbb{R}}\{C, D\}$, calcolare una base di $U \cap W$;
   iii) Se possibile, scrivere $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di A, B, C, D.