

Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 12/04/19

1 Indipendenza lineare e dimensione di spazi vettoriali

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
 $f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + z, 4x + 3y + 5z)$.
Calcolare una base per $\ker(f)$, $R(f)$ e le rispettive dimensioni.

Soluzione. La matrice rappresentativa di f nella base standard di $\mathbb{R}^3$ è

$$\text{data da } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Con l'algoritmo di Gauss otteniamo la seguente forma ridotta a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deduciamo che $\dim(R(f)) = rk(A) = 2$ e dunque una base per l'immagine

è data dai primi due vettori colonna della matrice rappresentativa, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Poichè $\dim(\ker(f)) + \dim(R(f)) = 3$, deduciamo che il nucleo ha dimensione 1. Una sua base si trova risolvendo il sistema lineare $Ax = 0$. Per la

riduzione vista prima, questo è equivalente al sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

che ha come soluzione $S = \{(t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Dunque una base di $\ker(f)$ è data dal vettore $(1, -3, 1)^T$.

2. Dato $V = \mathbb{R}^3$, consideriamo i sottospazi $U = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Determinare la dimensione e una base per ognuno dei seguenti sottospazi: U , W , $U \cap W$. Verificare che $V = U + W$.

Soluzione. Sappiamo che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono un insieme di generatori per U .

Essi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice che ha per colonne (o righe) i v_i ha rango 3 (=numero di vettori). Si può applicare l'algoritmo di Gauss per rendersi conto che il rango è 2, dunque il vettore v_3 è superfluo. Concludiamo che U ha dimensione 2 e una base è data da $\{v_1, v_2\}$.

Abbiamo che $W = \ker(f)$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'applicazione lineare $f(x, y, z) = x + y + z$. La sua dimensione è ovviamente 2 (poichè abbiamo una sola equazione non nulla il rango è 1, quindi $\dim(\ker(f)) = 3 - 1$).

Risolvendo il sistema rispetto a x troviamo che

$$W = \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Concludiamo che una base di W è data da $\{(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T\}$.

Per calcolare una base di $U \cap W$ scriviamo le equazioni cartesiane di U . Possiamo procedere imponendo che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$$

Oppure, equivalentemente, eliminare i parametri t, s dall'equazione vettoriale

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Troviamo dunque l'equazione $2x - y + 2z = 0$. Una base di $U \cap W$ si trova dunque risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni, generate dal vettore $(1, 0, -1)^T$, che costituisce dunque una base di $U \cap W$.

Notiamo che dalla formula di Grassman otteniamo $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$, dunque si ha effettivamente $U + W = \mathbb{R}^3$.

3. Sia $t \in \mathbb{R}$, consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$u_t = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2(1+t) \end{pmatrix}, v_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix}, x_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

- i) Determinare per quali valori del parametro t , si ha $x_t \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{u_t, v_t, w_t\}$;
- ii) Per tali valori di t , scrivere x_t come combinazione lineare di u_t, v_t, w_t .

Soluzione. La richiesta è equivalente a discutere il sistema parametrico la cui matrice completa è data da (notare che le colonne sono state ordinate in un altro senso, cioè v_t, u_t, w_t , perchè è più conveniente)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 1 & 2(1+t) & 1+2t & t^2 \end{array} \right) \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 0 & t & t & t^2 - t + 1 \end{array} \right)$$

Notiamo che al prossimo passo dobbiamo prendere come pivot t . Il caso $t = 0$ va trattato quindi separatamente, vediamo che in questo caso la matrice dei coefficienti ha rango strettamente minore della matrice completa, cioè il sistema non ammette soluzioni e dunque non è possibile scrivere x_0 come combinazione lineare di u_0, v_0, w_0 . Procedendo con $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ notiamo che se $t \neq 1$ il sistema non è di nuovo compatibile. L'unico valore di t per cui esiste una soluzione è dunque $t = 1$. In questo caso esistono ∞^1 soluzioni, $S = \{(z - 3, 1 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Per rispondere al punto ii) è dunque sufficiente prendere una di queste soluzioni. Per $z = 0$ troviamo il vettore $(-3, 1, 0)$ e dunque abbiamo $x_1 = u_1 - 3v_1$.

4. Sia $V = \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici a coefficienti reali 2×2 . Consideriamo i seguenti vettori di V :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Calcolare la dimensione e una base di $\text{span}_{\mathbb{R}}\{A, B, C, D\}$;
- ii) Siano $U = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A, B\}$ e $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{C, D\}$, calcolare una base di $U \cap W$;
- iii) Se possibile, scrivere $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di A, B, C, D .

Soluzione. Notiamo che le coordinate di A, B, C, D rispetto alla base standard di V data da

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- i) La dimensione cercata è il rango della matrice che ha come righe (o come colonne) i vettori coordinati.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow 3R_4 + R_2 \end{array}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim(\text{span}\{A, B, C, D\})$ è 3. Osserviamo che (siccome non sono stati effettuati scambi) le prime due righe sono indipendenti (*i.e.* A e B sono indipendenti), mentre poichè la terza riga è zero, C è dipendente da A, B e infine D è indipendente da A, B . Dunque il vettore C è superfluo e una base è data da $\{A, B, D\}$.

- ii) Dal punto precedente sappiamo che $\dim(U) = \dim(W) = 2$ e che $\dim(U + W) = 3$. Dunque dalla formula di Grassman $\dim(U \cap W) = 1$. Sempre dal punto precedente sappiamo che $C \in U$, concludiamo dunque che $U \cap W = \text{span}\{C\}$.
- iii) Sia A la matrice del punto i). Poichè il vettore delle coordinate di E nella base scelta è $e = (1, -1, 0, -1)^T$, quello che dobbiamo fare è risolvere il sistema lineare nell'incognita $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ dato da $A^T x = e$. Poichè però C è superfluo, potremmo eliminare la terza colonna e ridurre la dimensione del problema, ovvero studiare il seguente sistema (non omogeneo) di 4 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + 3y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Si trova un'unica soluzione $(x, y, z) = (-3, 1, 0)$ che quindi ci dice che $E = -3A + B$.