Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 10/05/19

1 Determinanti, aree e prodotti scalari

1. Date $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   Calcolare A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $det(2BA^{-1})$, $(A^t)^{-1}$.

2. Ricordiamo che, dati n vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, il volume ($n$-dimensionale) del parallelepipedo (n-dimensionale) costruito su tali vettori è la quantità
   $$Vol_n(P) = |det(A)|$$
   (dove A è la matrice avente i v_i come colonne o come righe).
   Disegnare i parallelogrammi/parallelepipedi costruiti sui seguenti insiemi di vettori e calcolarne le aree/volumi:
   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$
   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. i) Dati $v = e_1 + e_3$, $w = e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la lunghezza di v e di w e l'angolo α compreso fra v e w rispetto al prodotto scalare standard.
   ii) Dati $x_0 = (1+\sqrt{2})e_1 + e_3$, $y_0 = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la lunghezza di x_0 e l'angolo α compreso tra x_0 e y_0 rispetto al prodotto scalare
   $$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + 3x_3y_3$$

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su V.

i) Verificare che le coordinate di un vettore x rispetto ad una base ortogonale $\{v_1, \dots v_n\}$ sono date da $x_i = \dfrac{\langle x, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$;

ii) Sia ora $n = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormale e $v = v_1 + 3v_2 + v_3$. Detto $U = span\{v\}$, trovare una base di $U^\perp$;

iii) Scrivere l'applicazione lineare $\pi : V \to V$ data dalla proiezione ortogonale su U e calcolare la matrice associata a π nella base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo;

iv) Verificare che $\pi^2 = \pi$ e che $ker(\pi) = U^\perp$.;

v) Calcolare $\pi(w)$, dove $w = v_1 + v_2 - 3v_3$;

vi) Completare v a una base ortogonale di V e calcolare le coordinate di w in questa base.

5. i) Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

ii) Risolvere il sistema $Ax = b$ tramite il calcolo della matrice inversa, per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_2 - e_4$, $f(e_4) = e_1 - e_3$.

(a) Dimostrare che f è un isomorfismo;

(b) Calcolare $det(f), det(f^{-1}), det(f^t \circ f)$;

(c) Calcolare la matrice rappresentativa di f^{-1} nella base standard $\{e_1, \dots, e_4\}$;

(d) Calcolare $f^{-1}(v)$ per $v = 4e_2 + 2e_3 - 2e_4$.

7. Sia M una matrice antisimmetrica (ovvero $M^t = -M$) di ordine n.

i) Dimostrare che $det(M) = 0$ se n è dispari;

ii) Dimostrare che v è perpendicolare ad Mv per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

8. Scrivere l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data dalla proiezione ortogonale sul piano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e trovare la sua matrice rappresentativa nella base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$. Verificare che $\pi^2 = \pi$.

9. Si consideri $V = \mathbb{R}[x]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e $f : V \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f(p)(x) = (p(-1), p(1), p'(1))$$

(dove p' è la derivata di p).

(a) Calcolare la matrice rappresentativa di f in una base a piacere e calcolare $det(f)$;

(b) Trovare l'applicazione inversa di f.

10. Si consideri il seguente prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^3$

$$\langle x, y\rangle_a = x_1\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 + 2x_1\overline{y}_3 + 2x_3\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 - 2ix_2\overline{y}_3 + 2ix_3\overline{y}_2 + ax_3\overline{y}_3,$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Si determino i valori di a per cui il prodotto è non degenere.