Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 10/05/19

1 Determinanti, aree e prodotti scalari

1. Date $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   Calcolare A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $det(2BA^{-1})$, $(A^t)^{-1}$.

   Soluzione. $A^{-1} = A$, $B^{-1} = B$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $det(2BA^{-1}) = 2^2\, det(B)\, det(A)^{-1} = 4(-1)(-1) = 4$, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Ricordiamo che, dati n vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, il volume ($n$-dimensionale) del parallelepipedo (n-dimensionale) costruito su tali vettori è la quantità

   $$Vol_n(P) = |det(A)|$$

   (dove A è la matrice avente i v_i come colonne o come righe).
   Disegnare i parallelogrammi/parallelepipedi costruiti sui seguenti insiemi di vettori e calcolarne le aree/volumi:

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Soluzione. Rispettivamente $1, 2, 6; 8, 2$.

3. i) Dati $v = e_1 + e_3$, $w = e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la lunghezza di v e di w e l'angolo α compreso fra v e w rispetto al prodotto scalare standard.

ii) Dati $x_0 = (1+\sqrt{2})e_1 + e_3$, $y_0 = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la lunghezza di x_0 e l'angolo α compreso tra x_0 e y_0 rispetto al prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + 3x_3y_3$$

Soluzione.

i) $\|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$, mentre se θ è l'angolo compreso, allora
$$cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

ii) Osserviamo che si ha $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice con entrata (i, j) uguale a $\langle e_i, e_j\rangle$.
Abbiamo $\|x_0\| = \sqrt{\langle x_0, x_0\rangle} = 2$ e analogamente $\|y_0\| = 1$. Dunque come prima $cos(\theta) = \dfrac{\langle x_0, y_0\rangle}{\|x_0\| \cdot \|y_0\|} = \dfrac{1}{2}x_0^T Ay_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\langle \cdot, \cdot\rangle$ un prodotto scalare su V.

i) Verificare che le coordinate di un vettore x rispetto ad una base ortogonale $\{v_1, \dots v_n\}$ sono date da $x_i = \dfrac{\langle x, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$;

ii) Sia ora $n = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormale e $v = v_1 + 3v_2 + v_3$. Detto $U = span\{v\}$, trovare una base di $U^\perp$;

iii) Scrivere l'applicazione lineare $\pi : V \to V$ data dalla proiezione ortogonale su U e calcolare la matrice associata a π nella base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo;

iv) Verificare che $\pi^2 = \pi$ e che $ker(\pi) = U^\perp$.;

v) Calcolare $\pi(w)$, dove $w = v_1 + v_2 - 3v_3$;

vi) Completare v a una base ortogonale di V e calcolare le coordinate di w in questa base.

Soluzione.

i) Per definizione di cooordinate abbiamo $x = \sum_{i=1}^n x_iv_i$. Preso $j = 1, \dots, n$, moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per v_j. Sfruttando la bilinearità del prodotto scalare otteniamo $\langle x, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\langle v_i, v_j\rangle$. Siccome la base è ortogonale, per $i \neq j$ si ha $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, dunque $\langle x, v_j\rangle = x_j\langle v_j, v_j\rangle$

ii) Prima di procedere con i calcoli osserviamo che, come nell'esercizio precedente, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto a una base ortonormale e $y = (y_1, \dots, y_n)$ quelle di $w \in V$, allora $\langle v, w\rangle = y^T x$, ovvero la matrice che rappresenta il prodotto scalare in una base ortonormale (ovvero la matrice che ha per entrate $\langle v_i, v_j\rangle$) è la matrice identità.
Le coordinate di v sono $(1, 3, 1)$ e dunque $U^\perp$ sono i vettori di coordiante (x_1, x_2, x_3) tale che $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. Troviamo che una sua base è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.
Dunque una base di $U^\perp$ è $\{v_1 - v_3, v_2 - 3v_3\}$.

iii) $\pi(x) = \dfrac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$, la matrice si ottiene mettendo in colonna le coordinate di $\pi(v_i)$: siccome $\pi(v_1) = \frac{v}{11}, \pi(v_2) = \frac{3v}{11}, \pi(v_3) = \frac{v}{11}$ si ha

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\pi) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Ovvio.

v) $\pi(v_1 + v_2 - 3v_3) = \frac{v}{11} + \frac{3v}{11} - 3\frac{v}{11} = \frac{v}{11}$.

vi) Dal punto *ii*) sappiamo che i vettori di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono una base di V che completa v.
Ora applicando Gram-Schmidt agli ultimi due vettori otteniamo la seguente base ortogonale (ricordiamo che il primo vettore è gia ortogonale agli altri due per costruzione):
$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$
Le coordinate di w si calcolano come al punto *i*) e sono $(\dfrac{1}{11}, 2, -\dfrac{4}{11})$.

5. i) Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

ii) Risolvere il sistema $Ax = b$ tramite il calcolo della matrice inversa, per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

i) Sia $A = (A^1\, A^2\, A^3)$ la matrice dei coefficienti e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si ha $det(A) = -14$, $det(b\, A^2\, A^3) = -14$, $det(A^1\, b\, A^3) = -42$, $det(A^1\, A^2\, b) = -28$, dunque $x = 1, y = 3, z = 2$.

ii) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 8 & 5 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dunque $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_2 - e_4$, $f(e_4) = e_1 - e_3$.

   (a) Dimostrare che f è un isomorfismo;

   (b) Calcolare $det(f), det(f^{-1}), det(f^t \circ f)$;

   (c) Calcolare la matrice rappresentativa di f^{-1} nella base standard $\{e_1, \ldots, e_4\}$;

   (d) Calcolare $f^{-1}(v)$ per $v = 4e_2 + 2e_3 - 2e_4$.

   Soluzione. $a)$–$b)$ La matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   e si calcola che $det(f) = det(\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)) = 4$.
   Dunque poichè $det(f) \neq 0$, f è un isomorfismo.
   Si ha $det(f^{-1}) = det(f)^{-1} = \frac{1}{4}$, $det(f^t\, f) = det(f)^2 = 16$.
   $c)$ Per calcolare la funzione inversa di f qui potremmo sfruttare le "simmetrie" della funzione: osserviamo che sommando $f(e_1)$ con $f(e_4)$ e sfruttando la linearità di f troviamo $e_1 = f(\frac{1}{2}(e_1 + e_4))$. Analogamente $e_2 = f(\frac{1}{2}(e_2 + e_3))$, da cui andando a sostituire ricaviamo $e_3 = f(\frac{1}{2}(e_1 + e_4)) - f(e_4) = f(\frac{1}{2}(e_1 - e_4))$ e $e_4 = f(\frac{1}{2}(e_2 + e_3)) - f(e_3) = f(\frac{1}{2}(e_2 - e_3))$.
   La matrice che stiamo cercando è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   $d)$ Abbiamo $f^{-1}(v) = 4f^{-1}(e_2) + 2f^{-1}(e_3) - 2f^{-1}(e_4) = 2(e_2 + e_3) + e_1 - e_4 - (e_2 - e_3) = e_1 + e_2 + 3e_3 - e_4$.

7. Sia M una matrice antisimmetrica (ovvero $M^t = -M$) di ordine n.

   i) Dimostrare che $det(M) = 0$ se n è dispari;

   ii) Dimostrare che v è perpendicolare ad Mv per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

   Soluzione.

i) Ricordiamo che se A è una matrice di ordine n allora $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$ e che $det(M^T) = det(M)$. Da $M^T = -M$ concludiamo allora che $det(M) = (-1)^n det(M)$, da cui, per n dispari, $det(M) = 0$.

ii) $\langle Mv, v\rangle = -\langle M^T v, v\rangle = -\langle v, Mv\rangle$ e quindi $\langle Mv, v\rangle = 0$.

8. Scrivere l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data dalla proiezione ortogonale sul piano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ e trovare la sua matrice rappresentativa nella base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$. Verificare che $\pi^2 = \pi$.

   Soluzione. Ricordiamo che la proiezione ortogonale di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ su un iperpiano α è l'unico vettore $p_\alpha(v)$ che appartiene ad α tale che $v - p_\alpha(v) \in \alpha^\perp$. Lo studente può verificare che se ν è il **versore** (cioè di norma unitaria) normale ad α allora $p_\alpha(v) = v - \langle v, \nu\rangle\nu$ (oppure $p_\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle v, w_i\rangle w_i$ dove $\{w_i\}$ è una base ortonormale di α).
   Nel nostro caso $\nu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ e $\pi(e_i) = e_i - \frac{1}{\sqrt{3}}\nu$, dunque la matrice che stiamo cercando è

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

9. Si consideri $V = \mathbb{R}[x]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e $f : V \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f(p)(x) = (p(-1), p(1), p'(1))$$

   (dove p' è la derivata di p).

   (a) Calcolare la matrice rappresentativa di f in una base a piacere e calcolare $det(f)$;

   (b) Trovare l'applicazione inversa di f.

   Soluzione.

   (a) Scegliamo la base $\{1, x-1, (x-1)^2\}$ in partenza e la base standard in arrivo, così $1 \mapsto (1, 1, 0), (x-1) \mapsto (-2, 0, 1), (x-1)^2 \mapsto (4, 0, 0)$. Vediamo quindi che

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Si calcola che $det(f) = 4$.

   (b)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che il calcolo di f^{-1} poteva essera fatto anche notando che le coordinate di un polinomio rispetto la base scelta sono i coefficienti del polinomio di Taylor centrato in 1, e quindi le prime due coordinate del vettore immagine tramite f^{-1} sono le ultime due coordinate del vettore di partenza. Per calcolare l'ultima riga della matrice inversa poi basta sostituire -1 nell'identità di Taylor e trovare il coefficiente mancante.

10. Si consideri il seguente prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^3$

$$\langle x, y\rangle_a = x_1\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 + 2x_1\overline{y}_3 + 2x_3\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 - 2ix_2\overline{y}_3 + 2ix_3\overline{y}_2 + ax_3\overline{y}_3,$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Si determino i valori di a per cui il prodotto è non degenere.

11. La matrice che rappresenta il prodotto $\langle x, y\rangle_a$ nella base standard di $\mathbb{C}^3$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ i & 2 & 2i \\ 2 & -2i & a \end{pmatrix}$$

che ha determinante $a - 4$, per cui il prodotto è non degenere se e solo se $a \neq 4$.