

Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 8/03/19

1 Numeri complessi

Sia $i \in \mathbb{C}$ tale che $i^2 = -1$.

Definiamo la 'parte reale' $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ e 'parte immaginaria' $\Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$\Re : z = x + iy \mapsto x$, $\Im : z = x + iy \mapsto y$, dove $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi.

i) $z = i + \frac{i}{2-i}$;

ii) $z = (1 + 2i)^4 - (1 - 2i)^4$;

iii) $z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}$;

iv) z^9, z^{2019} , dove $z = i$.

2. Calcolare le soluzioni delle seguenti equazioni polinomiali nel campo complesso.

i) $z^3 = 8i$;

ii) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$;

iii) $z^2 - 2iz + 3 = 0$;

iv) $(z + 2 + 2i)^2 + 1 = 0$;

v) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$;

vi) $(z^2 + i)^2 + 1 = 0$.

3. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni.

i) $z|z| - 2z - i + 1 = 0$;

ii) $|z|^2 - z + \frac{i}{4} = 0$

iii) $z^4 + \bar{z}^4 = 0$;

iv) $z^3 = |z|^2$;

v) $|\bar{z} - 2| = |\Re(z + 2)|$;

vi) $(1 + i)z = \sqrt{2}|z|$;

vii) $||z| - 2i|^2 = 5$;

viii) $\Im(z^2) = |z|^2$.

4. Sia data la seguente funzione razionale $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1+iz}{iz+i}$.

i) Trovare tutti i punti fissi di f , ovvero gli $z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = z$.

ii) Calcolare $f^{-1}(3 + i)$.

5. Calcolare il numero di soluzioni della seguente equazione:

$$\bar{z}^9 = z^3|z|^5$$

;