Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 8/03/19

1 Numeri complessi

Sia $i \in \mathbb{C}$ tale che $i^2 = -1$.
Definiamo la 'parte reale' $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e 'parte immaginaria' $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:
$\Re : z = x + iy \mapsto x$, $\Im : z = x + iy \mapsto y$, dove $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi.

   i) $z = i + \frac{i}{2-i}$;

   ii) $z = (1 + 2i)^4 - (1 - 2i)^4$;

   iii) $z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}$;

   iv) z^9, z^{2019}, dove $z = i$.

   Soluzione.

   i) Abbiamo $i + \frac{i}{2-i} = \frac{3i+1}{2-i} = \frac{3i+1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{-1+7i}{5}$. Dunque $\Re(z) = -\frac{1}{5}$, $\Im(z) = \frac{7}{5}$.

   ii) Posto $w = (1+2i)^4$, si ha $z = w - \overline{w} = 2i\Im(w)$. Si calcola direttamente che $(1 + 2i)^4 = (-3 + 4i)^2 = -7 - 24i$. Dunque $\Im(w) = -24$, da cui $z = -48i$. Così abbiamo $\Re(z) = 0$, $\Im(z) = -48$.

   iii) Mettiamo prima le basi in forma trigonometrica e poi in forma esponenziale: $1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Nello stesso modo si trova che $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Dunque usando le proprietà delle potenze abbiamo facilmente che $z = 2e^{i(\frac{5}{2}\pi + 2\pi)} = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)} = 2i$. Dunque $\Re(z) = 0$, $\Im(z) = 2$. Alternativamente potevamo notare che $(1 + i)^2 = 2i = -(1 - i)^2$ e quindi $z = \frac{(2i)^5}{(-2i)^4} = 2i$.

   iv) Poiché $i^4 = 1$, possiamo calcolare la potenza n-esima di i guardando il resto della divisione di n per 4. Infatti se $n = 4q + r$, con q, r interi e $0 \le r < 4$, si ha $i^n = i^{(4q+r)} = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$. Abbiamo $9 = 4 \cdot 2 + 1$ e dunque $i^9 = i$, mentre $2019 = 4 \cdot 504 + 3$ e quindi $i^{2019} = i^3 = -i$.

2. Calcolare le soluzioni delle seguenti equazioni polinomiali nel campo complesso.

   i) $z^3 = 8i$;
   ii) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$;
   iii) $z^2 - 2iz + 3 = 0$;
   iv) $(z + 2 + 2i)^2 + 1 = 0$;
   v) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$;
   vi) $(z^2 + i)^2 + 1 = 0$.

   Soluzione.

   i) Ricordiamo che $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$. Dato che $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ abbiamo che $z = 8^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Per periodicità basta prendere $k = 0, 1, 2$, da cui ricaviamo le tre soluzioni: $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i, z_2 = 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = -\sqrt{3} + i, z_3 = -2i$.

   ii) Ponendo $w = z^3$, abbiamo $0 = w^2 + 7w - 8 = (w - 1)(w + 8)$. Quindi si ha $z^3 = 1$, oppure $z^3 = -8$. Risolvere la prima equazione equivale a calcolare le radici cubiche dell'unità. Posto $\zeta = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, allora si verfica facilmente che anche ζ^2 è radice cubica dell'unità. Le soluzioni della prima equazione sono dunque $1, \zeta, \zeta^2$. Per calcolare le soluzioni della seconda equazione basta moltiplicare la radice cubica "reale" di -8, ovvero -2, per le radici cubiche dell'unità (d'altronde $z = \sqrt[3]{-8 \cdot 1} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{1}$). Dunque tutte le soluzioni sono: $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = -2, z_5 = 1 - \sqrt{3}i, z_6 = 1 + \sqrt{3}i$.

   iii) Applichiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado: $z_{1,2} = i \pm \sqrt{-4} = i \pm 2i$.

   iv) Ricordando che $x^2+1 = (x-i)(x+i)$, troviamo che $(z+2+2i)^2+1 = (z + 2 + i)(z + 2 + 3i)$, dunque le due soluzoni sono $z_1 = -2 - i, z_2 = -2 - 3i$.

   v) La formula risolutiva dà: $z_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$. Per calcolare $\sqrt{-3 - 4i}$ mettiamo prima in evidenza il modulo del radicando e fattorizziamo la radice: $\sqrt{-3 - 4i} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \sqrt{5}i \cdot \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$. Sappiamo che $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che non è necessario sapere quanto vale vale θ per procedere con il calcolo della radice, infatti abbiamo che $\sqrt{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i} = e^{i\frac{\theta}{2}} = cos(\frac{\theta}{2}) + isin(\frac{\theta}{2})$.
   Dalle formule di trigonometria segue che $cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Analogamente si calcola che $sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e quindi $z_{1,2} = \frac{3\pm(2i-1)}{2}$, cioè $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - i$.

   vi) Come osservato nel punto *iv)* si ha $(z^2 + i)^2 + 1 = z^2(z^2 + 2i)$, da cui ricaviamo $z = 0$ (con molteplicità 2) oppure $z^2 = -2i$ che ha come soluzione $z = \pm\sqrt{-2i} = \pm i\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \pm(i - 1)$.

3. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni.

   i) $z|z| - 2z - i + 1 = 0$;
   ii) $|z|^2 - z + \frac{i}{4} = 0$
   iii) $z^4 + \overline{z}^4 = 0$;
   iv) $z^3 = |z|^2$;
   v) $|\overline{z} - 2| = |\Re(z + 2)|$;
   vi) $(1 + i)z = \sqrt{2}|z|$;
   vii) $||z| - 2i|^2 = 5$;
   viii) $\Im(z^2) = |z|^2$.

   Soluzione.

   i) L'equazione è equivalente a $z(|z| - 2) = i - 1$. Prendendo i moduli troviamo $|z|^2 - 2|z| - \sqrt{2} = 0$, da cui ricaviamo $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Osserviamo che la soluzione ottenuta prendendo il "meno" non è accettabile, poiché il modulo di un numero complesso è una quantità sempre positiva. Dunque se z è una soluzione dell'equazione, allora $|z| = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Sostituendo nell'equazione originale si trova che la soluzione è unica ed è $z = -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1} + \frac{i}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}$.

   ii) Qui conviene passare in coordinate cartesiane ponendo $z = x + iy$. Sostituendo troviamo $(x^2 + y^2 - x) + i(\frac{1}{4} - y) = 0$, da cui ricaviamo un sistema di due equazioni, $x^2 + y^2 - x = 0$ e $y = \frac{1}{4}$. Sostituendo il valore di y nella prima equazione troviamo $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$. L'equazione ammette quindi due soluzioni, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$.

   iii) Qui conviene riscrivere l'equazione in forma esponenziale, ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Abbiamo che $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$ e dunque sostituendo troviamo $\rho^4(e^{4\theta i} + e^{-4\theta i}) = 0$. Ricaviamo dunque due equazioni: $\rho = 0$ che dà come unica soluzione $z = 0$, oppure $e^{4\theta i} + e^{-4\theta i} = 0$. Mettendo in evidenza $e^{-4\theta i}$ e osservando che l'esponenziale complesso non è mai nullo, quest'ultima equazione è equivalente a $e^{8\theta i} + 1 = 0$, ovvero $e^{8\theta i} = e^{\pi i}$. In questo modo otteniamo $\theta = \frac{1}{8}(\pi + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Poichè a noi interessano le soluzioni $\theta \in [0, 2\pi)$ basta prendere $k = 0, \ldots, 7$. Osserviamo che l'ultima equazione non dipende da ρ e quindi per ogni θ che troviamo ci sono infinite soluzioni, corrispondenti alla semiretta che parte dall'origine e che forma un angolo θ con il semiasse reale positivo. Lo studente può divertirsi a controllare che effettivamente le soluzioni risultano essere le 4 rette passanti per l'origine che formano angoli di $\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$ con il semiasse reale positivo.

   iv) Prendendo i moduli troviamo $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oppure $|z| = 1$ che sostituiamo nell'equazione originale per tovare $z^3 = 1$. Le soluzioni di quest'ultima sono le radici cubiche dell'unità calcolate al punto *ii)* dell'esercizio 2).

v) Osserviamo che possiamo elevare al quadrato ambo i membri senza cambiare l'insieme delle soluzioni. Ponendo $z = x + iy$ troviamo $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$ da cui ricaviamo $x = \frac{y^2}{8}$, ovvero l'insieme delle soluzioni è una parabola nel piano complesso, con l'asse parallelo all'asse reale.

vi) Ponendo $z = x + iy$ troviamo $x - y + i(x+y) = \sqrt{2(x^2+y^2)}$. Eguagliando le rispettive parti reali e immaginarie troviamo un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2(x^2+y^2)} \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava $y = -x$ che sostituito nella prima dà $2x = 2|x| \Leftrightarrow x \geq 0$. Dunque la soluzione dell'equazione è la semiretta $y = -x,\ x \geq 0$.

vii) Riscriviamo l'equazione nel modo seguente: $(|z| - 2i)\overline{(|z| - 2i)} = 5$. Per linearità del coniugio ed essendo $|z| = \overline{|z|}$ troviamo $(|z|-2i)(|z|+2i) = 5$, ovvero $|z|^2 + 4 = 5$. Le soluzioni dell'equazione sono tutti i numeri complessi di modulo 1.

viii) Ponendo $z = x + iy$ abbiamo $2xy = x^2 + y^2$ che si riscrive come $(x-y)^2 = 0$. L'insieme delle soluzioni consiste della retta $y = x$.

4. Sia data la seguente funzione razionale $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1+iz}{iz+i}$.

   i) Trovare tutti i punti fissi di f, ovvero gli $z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = z$.

   ii) Calcolare $f^{-1}(3+i)$.

   Soluzione.

   i) L'equazione $f(z) = z$ risulta equivalente a $z^2 = -i$, che ha come soluzione $z = \pm e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

   ii) Abbiamo $f^{-1}(3+i) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} : f(z) = 3+i\}$, ovvero l'insieme cercato è dato dalle soluzioni dell'equazione $\frac{1+iz}{iz+i} = 3+i$, che è una semplice equazione di primo grado. La sua unica soluzione è $z = -\frac{1}{5}(8+i)$.

5. Calcolare il numero di soluzioni della seguente equazione:

$$\overline{z}^9 = z^3|z|^5$$

   Soluzione. Prendendo i moduli ambo i membri otteniamo $|z|^9 = |z|^8 \Leftrightarrow |z|^8(|z|-1) = 0$ da cui ricaviamo $z = 0$ oppure $|z| = 1$. Andando a sostituire $|z| = 1$ nell'equazione, tenendo a mente che $z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$, si ricava $z^{-9} = z^3 \Leftrightarrow z^{12} = 1$. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono le radici 12-esime dell'unità $z_k = e^{\frac{k\pi}{6}i}$, $k = 0, \dots, 11$. Il numero di soluzioni dell' equazione è 13.