Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 07/06/19

1 Autovalori e autovettori

1. Trovare autovalori e autovettori delle seguenti matrici su un campo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C})$ ed esibire per ognuna una matrice U_i che diagonalizza

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici e stabilire se sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Trovare infine, se possibile, una matrice che diagonalizza.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ -3 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile e per tali valori esibire una base rispetto cui la matrice associata ad A_k sia diagonale

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Sia $S_k : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ l'applicazione $p(x) \mapsto (x^2 - k)p''(x)$ (dove p'' è la derivata seconda). Trovare Range e Nucleo di S_k al variare di k e determinare per quali valori del parametro k l'endomorfismo S_k è diagonalizzabile. Determinare infine autovalori e autospazi.

5. Sia dato V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}\,(\mathbb{R},\ o\ \mathbb{C})$ con $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Dato $p \in \mathbb{K}[x]$ della forma $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, definiamo $p(T) : V \to V$ come l'endomorfismo $p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \mathbb{1}$.

i) Dimostrare che esiste un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ di grado minore o uguale a n^2 tale che $p(T) = 0$ (ovvero è l'endomorfismo nullo);

ii) Dimostrare che se $p \in \mathbb{K}[x]$ è un polinomio tale che $p(T) = 0$ e $p(0) \neq 0$, allora T è invertibile;

iii) Dimostrare che, se T è invertibile, T^{-1} è un polinomio in T, ovvero esiste $p \in \mathbb{K}[x]$ tale che $T^{-1} = p(T)$.

6. Dato $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, si trovi un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che goda delle seguenti proprietà:

   i) V è un autospazio di f;

   ii) f non è diagonalizzabile;

   iii) $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2$.