Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 07/06/19

1 Autovalori e autovettori

1. Trovare autovalori e autovettori delle seguenti matrici su un campo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) ed esibire per ognuna una matrice U_i che diagonalizza

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $p_{A_1}(t) = (t-3)(t-1)$, dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ e una base di autovettori è $\{e_1, e_2 - e_1\}$, e quindi possiamo prendere $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_{A_2}(t) = t^2 - 4$, dunque $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ e la matrice U_2 in questo caso è, per esempio, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_{A_3}(t) = t(t+5)$ con autovalori $0, -5$. Possiamo prendere dunque $U_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_{A_4}(t) = t^2 + 1$ dunque la matrice non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perchè lo spettro è $\{\pm i\}$, mentre su $\mathbb{C}$ è diagonalizzabile perchè gli autovalori sono distinti. Risolvendo i sistemi lineari $(D \pm i\mathbb{1})x = 0$ troviamo che $\{(2+i)e_1 - e_2, (2-i)e_1 - e_2\}$ sono una base di autovettori, dunque possiamo prendere $U_4 = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici e stabilire se sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Trovare infine, se possibile, una matrice che diagonalizza.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ -3 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $p_A(t) = t^3 - t = t(t-1)(t+1)$, $p_B(t) = t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4 = (t^2 - 2t + 2)^2 = 0$. Poichè p_A ha tutte radici distinte le molteplicità algebriche e geometriche coincidono, dunque A è diagonalizzabile sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$. p_B ha $1 \pm i$ come soluzioni di molteplicità algebrica 2, ma si calcola che la molteplicità geometrica è 1, dunque B non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (e a fortiori su $\mathbb{R}$). Una base di autovettori per A è $\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_3, 3e_1 + 2e_2 + e_3\}$ e dunque la matrice che diagonalizza è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile e per tali valori esibire una base rispetto cui la matrice associata ad A_k sia diagonale

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A_k è

$$p_{A_k}(t) = (t-3)(1-t)(t-2)^2$$

Affinchè sia diagonalizzabile dobbiamo avere $2 = m_a(2) = m_g(2) = \dim \ker(A_k - 2\mathbb{1})$. La matrice $A_k - 2\mathbb{1}$ ha rango 2 se e solo se $k \neq 0$ altrimenti ha rango 3, dunque per $k \neq 0$ si ha $1 = m_g(2) < m_a(2)$ e A_k non è diagonalizzabile. A_0 invece è diagonalizzabile e la base cercata è la base fatta dagli autovettori: $\{e_1 - e_2, e_2, e_3 - e_4, e_4\}$.

4. Sia $S_k : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ l'applicazione $p(x) \mapsto (x^2 - k)p''(x)$ (dove p'' è la derivata seconda). Trovare Range e Nucleo di S_k al variare di k e determinare per quali valori del parametro k l'endomorfismo S_k è diagonalizzabile. Determinare infine autovalori e autospazi.

Soluzione. Calcoliamo S_k sulla base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$1 \mapsto 0, x \mapsto 0, x^2 \mapsto 2(x^2 - k), x^3 \mapsto 6x(x^2 - k)$$

dunque mettendo in colonna le loro coordinate otteniamo la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6k \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo che il rango è 2 per ogni k e una base del $\ker$ è data da $\{1, x\}$ (che corrisponde quindi all'autospazio di autovalore 0), mentre il suo Range ha

come base $\{x^2 - k, x^3 - kx\}$. Il polinomio caratteristico di S_k è $p_{S_k}(t) = t^2(2-t)(6-t)$, e quindi gli autovalori sono 0, 2, 6. Affinchè S_k sia diagonalizzabile deve essere $2 = m_a(0) = m_g(0) = \dim \ker(S_k) = 4 - \text{rg}(S_k) = 2$, dunque la matrice è sempre diagonalizzabile. Una sua base di autovettori si trova risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle matrici $S_k - \lambda \mathbb{1}$ per λ nello spettro: troviamo quindi autospazi $V_0 = \text{span}\{1, x\}$, $V_2 = \text{span}\{x^2 - k\}$, $V_6 = \text{span}\{x^3 - kx\}$.

5. Sia dato V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$) con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ e sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Dato $p \in \mathbb{K}[x]$ della forma $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, definiamo $p(T) : V \rightarrow V$ come l'endomorfismo $p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 \mathbb{1}$.
- i) Dimostrare che esiste un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ di grado minore o uguale a n^2 tale che $p(T) = 0$ (ovvero è l'endomorfismo nullo);
  - ii) Dimostrare che se $p \in \mathbb{K}[x]$ è un polinomio tale che $p(T) = 0$ e $p(0) \neq 0$, allora T è invertibile;
  - iii) Dimostrare che, se T è invertibile, T^{-1} è un polinomio in T , ovvero esiste $p \in \mathbb{K}[x]$ tale che $T^{-1} = p(T)$.

Soluzione.

- i) Poichè $\mathbb{1}, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ sono $n^2 + 1$ vettori nello spazio degli endomorfismi $\text{End}(V)$ (che ha dimensione n^2 in quanto isomorfo a $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{K})$), essi sono necessariamente dipendenti. Esistono quindi $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$ tale che $a_n T^{n^2} + \dots + a_1 T + a_0 \mathbb{1} = 0$.
  - ii) Abbiamo $a_d T^d + \dots + a_1 T + a_0 \mathbb{1} = 0$, dunque $-a_0^{-1} T (a_d T^{d-1} + \dots + a_1 \mathbb{1}) = \mathbb{1}$, ovvero T è invertibile.
  - iii) Sia T invertibile e sia p il polinomio di grado minimo tale che $p(T) = 0$, allora $p(0) \neq 0$. Infatti se avessimo $a_d T^d + \dots + a_1 T = 0$, moltiplicando per T^{-1} l'identità troviamo un polinomio di grado più basso $q(x) = a_d x^{d-1} + \dots + a_1$ che soddisfa $q(T) = 0$, contro l'ipotesi di minimalità. Ma allora ragionando come in *ii*) troviamo $T^{-1} = -a_0^{-1} (a_d x^{d-1} + \dots + a_1)$, che è dunque un polinomio in T .
6. Dato $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, si trovi un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che goda delle seguenti proprietà:
- i) V è un autospazio di f ;
  - ii) f non è diagonalizzabile;
  - iii) $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2$.

Soluzione. I vettori $v_1 = e_1 - 2e_2$ e $v_2 = e_1 + 2e_3$ formano una base di V che si completa a una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo ad esempio il vettore

$v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ (su cui sappiamo cosa deve fare f). Nella base data da $\{v_1, v_2, v_3\}$, dunque, la matrice che rappresenta f deve essere della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove λ è l'autovalore relativo all'autospazio V . Vediamo quindi che lo spettro di f è composto da 0 (con molteplicità 1 se $\lambda \neq 0$ oppure altrimenti con molteplicità 3) e da λ con molteplicità 2. Si ha $\dim \ker(f - \lambda id) = 2$, quindi se $\lambda \neq 0$ la molteplicità geometrica di λ coincide con quella algebrica e f è diagonalizzabile. Scegliendo $\lambda = 0$ invece questo endomorfismo soddisfa tutte le richieste. Calcoliamolo effettivamente, ovvero scriviamo la sua matrice rappresentativa rispetto la base standard, cosa che si fa coniugando con la matrice del cambiamento di base:

$$f(x) = Ax, \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$