

PROGRAMMA di massima

(si veda il diario delle lezioni per la versione definitiva):

NUMERI COMPLESSI: Operazioni di somma e prodotto. Il coniugato. Rappresentazione Geometrica. Forma trigonometrica.

POLINOMI: Operazioni tra polinomi. Radici di un polinomio. Teorema fondamentale dell'algebra. Radici di un polinomio reale. Radice n-esima di un numero complesso.

VETTORI: \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , lo spazio delle n-uple reali e complesse rispettivamente. Addizione di vettori e moltiplicazione per uno scalare.

MATRICI: Equazioni lineari. Sistema lineare di m equazioni in n incognite. Sistema omogeneo. Soluzione di un sistema di equazioni lineari. Matrice rappresentativa di una applicazione lineare. Somma di matrici e moltiplicazione per uno scalare. Matrice quadrata, nulla, identità, diagonale, scalare, triangolare superiore, triangolare inferiore, trasposta, simmetrica, antisimmetrica. Prodotto di matrici: riga per colonna. Matrice inversa. Operazioni elementari sulle righe. Riduzione. Rango di una matrice.

SPAZI VETTORIALI: Assiomi di definizione. Esempi: \mathbb{R}^n , $M(m, n; \mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$. Sottospazi di uno spazio vettoriale. Combinazioni lineari, indipendenza lineare, insieme di generatori, base, dimensione. Componenti di un vettore rispetto a una base. Somma e intersezione di sottospazi di uno spazio vettoriale. Somma diretta. Caratterizzazione: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow W \cap U = \{0\}$. Teorema (Formula di Grassmann): $\dim(W + U) + \dim(W \cap U) = \dim W + \dim U$. Corollario: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W + U) = \dim W + \dim U$.

DETERMINANTE: Definizione assiomatica. Teorema di Binet: $\det(AB) = \det A \det B$. Proprietà del determinante. Teorema di Laplace. Applicazione del determinante al calcolo dell'inversa di una matrice. Regola di Cramer.

SISTEMI LINEARI: Teorema (Rouchè-Capelli sulla risolubilità): $AX = B$ è risolubile \Leftrightarrow rango $A =$ rango (A, B) . Teorema (Rouchè-Capelli sulla dimensione del insieme delle soluzioni dei sistemi risolubili): Se $AX = B$ è risolubile allora l'insieme delle soluzioni del sistema ha dimensione ∞^{n-p} , dove n è il numero delle incognite e p è il rango di A. Tecniche di calcolo. Calcolo di A^{-1} .

GEOMETRIA ANALITICA: Prodotto scalare in \mathbb{R}^n . Prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 . Orientazione. Proiezione ortogonale. Area, Volume. Equazione cartesiana e parametrica di una retta nel piano. Retta per due punti. Rette parallele e ortogonali. Distanza fra due rette, distanza da un punto a una retta. Circonferenza. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani nello spazio. Retta per due punti. Posizione relativa tra rette. Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due rette, tra due piani, tra una retta e un piano. Intersezione. Rette sghembe e complanari. Sfera e circonferenza. Distanza: fra due punti, distanza da un punto a una retta, da un punto a un piano, fra due piani, fra due rette.

APPLICAZIONI LINEARI: Applicazioni lineari fra spazi vettoriali di dimensione finita. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Rango di una applicazione lineare. Applicazioni iniettive, surgettive e bigettive. Teorema (della dimensione): Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare, se $\dim V = n < \infty$ allora $n = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$. Base di $\ker f$, base di $\text{Im } f$. Matrice di cambio di base.

ENDOMORFISMI: Autovalori ed autovettori di un endomorfismo. Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili. Polinomio caratteristico. Teorema di

Cayley-Hamilton. Autospazio, molteplicità algebrica, molteplicità geometrica di un autovalore. Criterio di diagonalizzazione. Invarianti per coniugio di una matrice.

SPAZI EUCLIDEI: Prodotto scalare su uno spazio vettoriale. Ortogonalità, ortonormalità. Basi ortogonali (Gram-Schmidt). Suplemento ortogonale di un sottospazio vettoriale. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale. Matrice della proiezione ortogonale. Formula di Parseval. Teorema di Pitagora. Applicazioni lineari su spazi metrici. L'applicazione aggiunta. Applicazioni autoaggiunte o simmetriche. Teorema spetrale. Trasformazioni unitarie, trasformazioni ortogonali.

FORME QUADRATICHE REALI: Definizione. Matrice associata ad una forma quadratica. Matrici congruenti. Invarianti per congruenza di una matrice simmetrica reale. Forma canonica metrica e forma canonica affine di una forma quadratica. Matrici simmetriche reali definite e semidefinite positive e negative. Criteri di positività e semipositività.

GEOMETRIA PROIETTIVA: Retta proiettiva. Piano proiettivo. Geometria nel piano proiettivo. Proiettività.

Libri consigliati

- M. Abate, Geometria, Ed. McGraw-Hill
- Serge Lang - Algebre Lineare, Ed. Boringhieri.
- S. Abeasis, Elementi di Algebra Lineare e Geometria, Ed. Zanichelli. Complementi di Algebra Lineare, Ed. Zanichelli.
- **F. Flamini**, A. Verra, Matrici e vettori, ed. Carocci, Roma 2007.
- **L. Geatti**, Dispense di Algebra Lineare, Geometria del piano e dello spazio, Coniche, Quadriche, Esercizi, Geometria Proiettiva.
- E. Abbena, A.M. Fino, G.M. Gianella, Algebra Lineare e Geometria Analitica, Vol I, Vol II.