

Geometria 1

Secondo Appello-Sessione Invernale, 25-02-20

Cognome.....	Nome.....
--------------	-----------

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si trovino tutte le soluzioni, nei complessi, dell'equazione $\sin z = -1$.
2. Si descrivano tutte le matrici 2 per 2 tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq \|A^n\| \leq (n+1).$$

3. Si trovi, se esiste, la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Siano r_1 la retta, in $\mathbb{R}^3$, passante per $(1, 1, 0)$ e parallela a $(1, 1, 0)$ e r_2 la retta determinata dalla intersezione dei piani $x_1 + x_2 = 0$ e $x_2 + x_3 = 1$. Si trovi, se esiste, un piano p tale che $(0, 1, 0) \in p$ e $p \cap (r_1 \cup r_2) = \emptyset$.
5. Sia $M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali due per due.
Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione data da

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T P A)$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Soluzione

1. La prima cosa da ricordare è cosa è $\sin z$ per z complesso. Per $z = x \in \mathbb{R}$ sappiamo che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Visto che la funzione definita sui complessi deve coincidere con la solita funzione sui reali abbiamo, per $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ne segue che dobbiamo risolvere l'equazione

$$-1 = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Moltiplicando per e^{iz} si ha

$$0 = e^{2iz} + 2ie^{iz} - 1 = (e^{iz})^2 + 2ie^{iz} + i^2 = (e^{iz} + i)^2.$$

Ne segue che deve essere $e^{iz} = -i$, ovvero, se $z = x + iy$, $e^{ix-y} = -i$. Dunque $y = 0$ e $\cos x = 0$, $\sin x = -1$. Ovvero $z = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$ per tutti gli $n \in \mathbb{Z}$. In altre parole le soluzioni nel campo dei complessi coincidono con quelle nel campo dei reali.

2. Prima di tutto la matrice deve avere almeno un autovettore v . Sia λ l'autovalore associato, allora $\|A^n v\| = \|\lambda^n v\|$ ne segue che deve essere $|\lambda| = 1$ altrimenti la crescita non rispetta le ipotesi. Se scegliamo la base $\{v, v^\perp\}$ la matrice A si scrive come

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

per qualche $\theta \in \mathbb{R}$ and $a, b \in \mathbb{C}$. Si può facilmente mostrare per induzione che

$$A^n = \begin{pmatrix} e^{in\theta} & a_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

con $a_{n+1} = e^{i\theta n} a + a_n b$. Questo implica $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a e^{i\theta(n-1-k)} b^k$. Ne segue che per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, abbiamo

$$\|A^n\| \geq \|A^n v\| = \|(e^{i\theta n} v_1 + a_n v_2, b^n v_2)\| \geq |b|^n |v_2|$$

ne segue che deve essere $|b| \leq 1$. D'altro canto se $|b| \leq 1$

$$\begin{aligned} 2n \leq \|A^n v\| &\leq \|(e^{i\theta n} v_1 + a_n v_2, b^n v_2)\| \leq \sqrt{2} \max \left\{ |v_1| + \sum_{k=0}^{n-1} |a| |b|^k |v_2|, |b|^n |v_2| \right\} \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ |v_1| + \frac{|a|}{1-|b|} |v_2|, |v_2| \right\} \end{aligned}$$

which is a contradiction for n large enough. It follows that $|b| = 1$, ovvero $b = e^{i\varphi}$. Ne segue che se $\varphi \neq \theta$ si ha

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a e^{i\theta(n-1-k)} e^{i\varphi k} = a e^{i\theta(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik(\varphi-\theta)} = a e^{i\theta(n-1)} \frac{1 - e^{in(\varphi-\theta)}}{1 - e^{i(\varphi-\theta)}}$$

Ovvero $|a_n| \leq |a| \frac{2}{1-\cos(\varphi-\theta)}$. Il che implica che $\|A^n\|$ è uniformemente limitata contrariamente alle ipotesi. Ne segue che $\varphi = \theta$ da cui

$$A^n = e^{i\theta n} \begin{pmatrix} 1 & ane^{-i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|^2 = 1$,

$$\|A^n v\| = \sqrt{|v_1|^2 + 2n|v_1||v_2| + n^2|v_2|^2 + |v_2|^2} \leq \sqrt{1 + 2n + n^2} \leq n + 1$$

dunque $\|A^n\| \leq n + 1$. D'altro canto

$$\|A^n\| \geq \|A^n e_2\| \geq n.$$

Dunque le sole matrici che soddisfano le disuguaglianze sono della forma

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & a \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{C}$.

3. Si noti che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

dunque la matrice è invertibile. Visto che è diagonale a blocchi e l'inversa di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è se stessa sembra ovvio che l'inversa sia la matrice stessa. Questo è infatti vero visto che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Possiamo scrivere le equazioni della retta r_2 come

$$\begin{aligned} \langle (1, 1, 0), (x, y, z) \rangle &= 0 \\ \langle (0, 1, 1), (x, y, z) - (0, 0, 1) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Poichè r_2 deve appartenere ad entrambi i piani, deve essere ortogonale sia a $(1, 1, 0)$ che a $(0, 1, 1)$, ovvero deve essere parallela al vettore $(1, -1, 1)$. Inoltre è facile verificare che $(0, 0, 1)$ appartiene a entrambi i piani e quindi r_2 deve contenere $(0, 0, 1)$. Dunque l'equazione parametrica di r_2 è $(0, 0, 1) + (1, -1, 1)t$. Ovviamente il piano p deve essere parallelo ad entrambe le rette. Il vettore $(1, -1, -2)$ è perpendicolare sia a r_1 e a r_2 . Ne segue che $\langle (1, -1, -2), (x, y - 1, z) \rangle = 0$, ovvero $x - y - 2z + 1 = 0$, è il piano passante per $(0, 1, 0)$ e parallelo alle rette r_1, r_2 . Dunque o le rette giacciono sul piano o non lo incontrano mai. È facile verificare che abbiamo la seconda possibilità.

5. Poichè l'applicazione è chiaramente bilineare e

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T P A) = \text{Tr}([B^T P A]^T) = \text{Tr}(A^T P B) = \langle B, A \rangle$$

l'unica cosa che rimane da dimostrare è la positività. Ovvero che per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^T P A) \geq 0.$$

Si noti che $(A^T P A)^T = A^T P A$, dunque la matrice $A^T P A$ ha due autovalori reali $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e $\text{Tr}(A^T P A) = \lambda_1 + \lambda_2$. D'altro canto se $A^T P A v_i = \lambda_i v_i$, $i \in \{1, 2\}$, $\|v_i\| = 1$, allora

$$\lambda_i = \langle v_i, A^T P A v_i \rangle = \langle A v_i, P A v_i \rangle.$$

Ma P è una matrice simmetrica con determinante uno e traccia due. Questo implica che ha autovalori $\nu_1, \nu_2 = \nu_1^{-1} > 0$ e autovettori ortogonali. Detti w_j , $j \in \{1, 2\}$, i corrispondenti autovettori normalizzati possiamo scrivere

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^2 \nu_j \langle w_j, A v_i \rangle^2 \geq 0.$$

dunque gli autovalori di $A^T P A$ devono essere non negativi. Per concludere supponiamo che $\langle A, A \rangle = 0$ ma allora gli autovalori devono essere ambedue nulli e $0 = \langle w_j, A v_i \rangle$ che implica $A v_i = 0$ ovvero $A = 0$. Questo conclude la dimostrazione.