Geometria 1

Primo Appello-Sessione Invernale, 22-01-20

Cognome.....	Nome.....
--------------	-----------

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si trovino tutte le soluzioni, nei complessi, dell'equazione $e^z = 3$.
2. Siano $p \in \mathbb{R}_n[t]$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, e $a \in \mathbb{R}$ tali che $p(a) = 0$. Si mostri che esiste $q \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tale che $p(t) = (t - a)q(t)$.
3. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni tre-lineari antisimmetriche da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}$. Si mostri che è uno spazio vettoriale sul campo dei reali e se ne calcoli la dimensione.
4. Si studino le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned}y + z &= a \\2x + 3y + 7z &= 5 \\x - 3y - z &= -2\end{aligned}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

5. Si dica per quali valori di k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Soluzione

1. Prima di tutto si noti che esiste una soluzione reale: $z = \ln 3$. Se esiste un'altra soluzione z allora deve essere

$$e^{z - \ln 3} = 1.$$

Ponendo $z - \ln 3 = a + ib$ si ha $a \cos b + ai \sin b = 1$, dunque, visto che $a = 0$ non è una soluzione la parte immaginaria deve essere nulla, il che significa $b = n\pi$. Questo implica $a \cos(n\pi) = 1$ che è soddisfatta solo per n pari. Dunque $z = \ln 3 + 2\pi ni$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Sia $p(t) = \sum_{k=0}^n p_k t^k \in \mathbb{R}_n[t]$ tale che $p(a) = 0$. Ovvero $\sum_{k=0}^n p_k a^k = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n p_k t^k - \sum_{k=0}^n p_k a^k = \sum_{k=1}^n p_k (t^k - a^k) = \sum_{k=1}^n p_k (t-a) \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^j a^{k-j-1} \right) \\ &= (t-a) \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^n p_k a^{k-j-1} \right) t^j \right] =: (t-a)q(t). \end{aligned}$$

In alternativa si può copiare un argomento nella dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n p_k (t-a+a)^k = \sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (t-a)^j a^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} p_k a^{k-j} \right] (t-a)^j =: \sum_{j=0}^n b_j (t-a)^j. \end{aligned}$$

Ma allora $p(a) = 0$ implica $b_0 = 0$, ovvero

$$p(t) = \sum_{j=1}^n b_j (t-a)^j = (t-a) \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} (t-a)^j =: (t-a)q(t).$$

Infine si può usare il teorema fondamentale dell'algebra per affermare che, sui complessi,

$$p(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i).$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere che $z_n = a$, ma allora ponendo $q(t) = \prod_{i=1}^n (t - z_i)$ si ha

$$p(t) = (t-a)q(t).$$

L'unico problema rimasto è dimostrare che $q(t)$ è un polinomio reale. Ma, poichè p è reale, se $p(z) = 0$ allora $p(\bar{z}) = 0$. Dunque le radici vengono in coppia e siccome $(t-z)(t-\bar{z}) = t^2 - (z+\bar{z})t + z\bar{z}$ è un polinomio a coefficienti reali, ne segue che anche q è reale.

3. Una funzione tre-lineare su $\mathbb{R}^4$ ha la forma $f(x_1, x_2, x_3)$, con $x_i \in \mathbb{R}^4$, lineare in ogni variabile. L'antisimmetria significa che $f(x, y, z) = -f(y, x, z) = -f(z, y, x) = -f(x, z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^4$. Se $f \in \mathcal{A}$ allora anche $\lambda f \in \mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e se $f, g \in \mathcal{A}$ allora anche $f + g \in \mathcal{A}$, dunque abbiamo uno spazio vettoriale (tutte le altre proprietà seguono banalmente dalle proprietà analoghe di $\mathbb{R}$).

Data la base standard di $\mathbb{R}^4$, $\{e_i\}_{i=1}^4$, il valore di $f(x_1, x_2, x_3)$ per ogni $x_i \in \mathbb{R}^4$ è univocamente determinato dai valori di $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$. Si noti che l'antisimmetria implica che $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_2}) = 0$ se due degli indici i_j sono uguali.

Ne segue che $\alpha_4(f) = f(e_1, e_2, e_3)$, $\alpha_3(f) = f(e_1, e_2, e_4)$, $\alpha_2(f) = f(e_1, e_3, e_4)$, $\alpha_1(f) = f(e_2, e_3, e_4)$ determinano tutti i valori non nulli (gli altri si ottengono facendo permutazioni e usando l'antisimmetria). Si noti che abbiamo appena definito $\bar{\alpha} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\bar{\alpha}(f) = (\alpha_1(f), \alpha_2(f), \alpha_3(f), \alpha_4(f))$ e che è una funzione lineare e suriettiva. Inoltre è iniettiva perchè se $\bar{\alpha}(f) = 0$ allora $f = 0$. Duque $\mathcal{A}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^4$ e $\dim(\mathcal{A}) = 4$.

Se volete una dimostrazione più esplicita allora occorre fare qualche calcolo.

Definiamo $\mathcal{P} = \{p : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} : \sigma(i) = \sigma(j) \implies i = j\}$ e chiamiamo $\sigma(p)$ la parità della p definita come il numero di permutazioni elementari necessarie per trasformarla in una funzione strettamente crescente. Infine definiamo $\{f_i\}_{i=1}^4$ come, per ogni $p \in \mathcal{P}$,

$$f_i(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \text{Image}(p) \\ \sigma(p) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la estendiamo a $(\mathbb{R}^4)^3$ per multilinearità. È facile verificare che $f_i \in \mathcal{A}$ e che $\alpha_k(f_i) = \delta_{ik}$. Data $f \in \mathcal{A}$ e, per ogni $x_i \in \mathbb{R}^4$, possiamo scrivere $x_i = \sum_{j=1}^4 x_{i,j} e_j$ e quindi, per la trilinearità¹

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, 4\}} x_{1, j_1} x_{2, j_2} x_{3, j_3} f(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i, p(i)} f(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i, p(i)} \sum_{k=1}^4 f(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \sigma(p) f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i, p(i)} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i, p(i)} f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) f_k(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ovvero $f = \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) f_k$. Dunque le f_k generano $\mathcal{A}$. Inoltre è facile verificare che sono linearmente indipendenti, dunque sono una base. Ne segue che $\dim(\mathcal{A}) = 4$.

4. Sommando la terza alla seconda e la prima (moltiplicata per 3) alla terza si ha

$$\begin{aligned} y + z &= a \\ 3x + 6z &= 3 \\ x + 2z &= -2 + 3a \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} y + z &= a \\ x + 2z &= 1 \\ x + 2z &= -2 + 3a \end{aligned}$$

che ha soluzione solo se $1 = -2 + 3a$, ovvero $a = 1$. D'altro canto, se $a = 1$, si ha

$$\begin{aligned} y &= 1 - z \\ x &= 1 - 2z \end{aligned}$$

e le soluzioni formano uno spazio unidimensionale.

¹Nelle prime quattro righe si usa continuamente il fatto che gli addendi sono non nulli solo se $k \notin \text{Image}(p)$.

5. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Ne segue che la matrice A è diagonalizzabile solo se $\text{Rank}(2\mathbf{1} - A) = 1$, ma

$$(2\mathbf{1} - A)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1, -v_1, -kv_2).$$

genera uno spazio unidimensionale solo se $k = 0$. Quindi la matrice è diagonalizzabile solo per $k = 0$.