Geometria 1

Secondo Appello-Sessione Autunnale, 10-09-19

Cognome.....	Nome.....
--------------	-----------

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$, formano un gruppo.
2. Siano $p \in \mathbb{R}_n[t]$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, e $a \in \mathbb{R}$ tali che $p(a) = 0$. Si mostri che esiste $q \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tale che $p(t) = (t - a)q(t)$.
3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$Av = \lambda Bv.$$

4. Dati i polinomi $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_2[t]$ definiti da

$$p_1(t) = 1 + t; \quad p_2(t) = 1 + 2t + t^2; \quad p_3(t) = t - t^2.$$

Si dimostri che $\{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[t]$. Si esprima il polinomio $q(t) = 2 - t + t^2$ in questa base.

5. Sia $M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali due per due.
Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione data da

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T P A)$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Soluzione

- Poichè $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo e l'unità è una soluzione, quindi l'unica cosa che occorre verificare è la chiusura rispetto alla moltiplicazione e al suo inverso. Siano z_1, z_2 due soluzioni, allora $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1 \cdot 1 = 1$. Dunque il prodotto di due soluzioni è soluzione. Inoltre se z è soluzione allora $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, ovvero z^{-1} è una soluzione. Quindi le soluzioni formano un gruppo.
- Sia $p(t) = \sum_{k=0}^n p_k t^k \in \mathbb{R}_n[t]$ tale che $p(a) = 0$. Ovvero $\sum_{k=0}^n p_k a^k = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n p_k t^k - \sum_{k=0}^n p_k a^k = \sum_{k=1}^n p_k (t^k - a^k) = \sum_{k=1}^n p_k (t-a) \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^j a^{k-j-1} \right) \\ &= (t-a) \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^n p_k a^{k-j-1} \right) t^j \right] =: (t-a)q(t). \end{aligned}$$

In alternativa si può copiare un argomento nella dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n p_k (t-a+a)^k = \sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (t-a)^j a^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} p_k a^{k-j} \right] (t-a)^j =: \sum_{j=0}^n b_j (t-a)^j. \end{aligned}$$

Ma allora $p(a) = 0$ implica $b_0 = 0$, ovvero

$$p(t) = \sum_{j=1}^n b_j (t-a)^j = (t-a) \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} (t-a)^j =: (t-a)q(t).$$

Infine si può usare il teorema fondamentale dell'algebra per affermare che, sui complessi,

$$p(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i).$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere che $z_n = a$, ma allora ponendo $q(t) = \prod_{i=1}^{n-1} (t - z_i)$ si ha

$$p(t) = (t-a)q(t).$$

L'unico problema rimasto è dimostrare che $q(t)$ è un polinomio reale. Ma, poichè p è reale, se $p(z) = 0$ allora $p(\bar{z}) = 0$. Dunque le radici vengono in coppia e siccome $(t-z)(t-\bar{z}) = t^2 - (z+\bar{z})t + z\bar{z}$ è un polinomio a coefficienti reali, ne segue che anche q è reale.

- L'equazione $(A - \lambda B)v = 0$ ha una soluzione non nulla se e solo se $\det(A - \lambda B) = 0$. Ovvero

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda - 1 & 0 \\ 2\lambda - 1 & 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(4\lambda - 1).$$

Dunque l'equazione ha soluzione non nulla solo per $\lambda \in \{0, \frac{1}{4}\}$.

- Supponiamo che esistano $a_i \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = \sum_{i=1}^3 3a_i p_i(t) = a_1 + a_2 + (a_1 + 2a_2 + a_3)t + (a_2 - a_3)t^2$$

ovvero deve essere

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= 0 \\a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0 \\a_2 - a_3 &= 0\end{aligned}$$

che ammette $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ come unica soluzione. Dunque i polinomi sono linearmente indipendenti e quindi, siccome $\mathbb{R}_2[t]$ ha dimensione tre, formano una base. Per esprimere q in tale base dobbiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^3 3a_i p_i(t) = q(t)$$

ovvero

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= 2 \\a_1 + 2a_2 + a_3 &= -1 \\a_2 - a_3 &= 1\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 - a_2 \\1 + 2a_2 &= -1 \\a_2 - 1 &= a_3.\end{aligned}$$

Quindi $a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -2$. Per cui $q = 3p_1 - p_2 - 2p_3$.

5. Poichè l'applicazione è chiaramente bilineare e

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T P A) = \text{Tr}([B^T P A]^T) = \text{Tr}(A^T P B) = \langle B, A \rangle$$

l'unica cosa che rimane da dimostrare è la positività. Ovvero che per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^T P A) \geq 0.$$

Si noti che $(A^T P A)^T = A^T P A$, dunque la matrice $A^T P A$ ha due autovalori reali $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e $\text{Tr}(A^T P A) = \lambda_1 + \lambda_2$. D'altro canto se $A^T P A v_i = \lambda_i v_i$, $i \in \{1, 2\}$, $\|v_i\| = 1$, allora

$$\lambda_i = \langle v_i, A^T P A v_i \rangle = \langle A v_i, P A v_i \rangle.$$

Ma P è una matrice simmetrica con determinante uno e traccia due. Questo implica che ha autovalori $\nu_1, \nu_2 = \nu_1^{-1} > 0$ e autovettori ortogonali. Detti w_j , $j \in \{1, 2\}$, i corrispondenti autovettori normalizzati possiamo scrivere

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^2 \nu_j \langle w_j, A v_i \rangle^2 \geq 0.$$

dunque gli autovalori di $A^T P A$ devono essere non negativi. Per concludere supponiamo che $\langle A, A \rangle = 0$ ma allora gli autovalori devono essere ambedue nulli e $0 = \langle w_j, A v_i \rangle$ che implica $A v_i = 0$ ovvero $A = 0$. Questo conclude la dimostrazione.