Geometria 1

Secondo Appello-Sessione Estiva, 15-07-19

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino i polinomi $p(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + 1$ e $q(x) = ix^5 + ix^4 - x^3 + x^2 + 1$. Si dica se $p(x) = 0$ e $q(x) = 0$ hano una soluzione reale oppure no.
2. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni tre-lineari antisimmetriche da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}$. Si mostri che è uno spazio vettoriale sul campo dei reali e se ne calcoli la dimensione.
3. Data la retta, in $\mathbb{R}^3$, $\{(0,0,2) + (2,1,0)t\}_{t\in\mathbb{R}}$ e la retta determinata dalle equazioni
$$\begin{aligned} z - y &= 1 \\ z + x + y &= 1 \end{aligned}$$
si calcoli la distanza tra tali rette.
4. Data la conica C di equazioni $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ e i piani $P(a,b)$ di equazioni $z + ax = b$ si descrivano le proiezioni sul piano x, y delle loro intersezioni al varaire di a e b in $\mathbb{R}$.
5. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si trovino $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^2$ tali che
$$(A - \lambda B)v = 0.$$

Soluzione

1. Per il Teorema fondamentale dell'algebra p e q hanno 5 soluzioni complesse (contate con molteplicità). Se $x \in \mathbb{C}$ è soluzione di p allora anche $\bar{x}$ lo è, ne segue che le soluzioni non reali sono in coppia e quindi non è possibile che tutte e cinque le soluzioni non siano reali. Dunque p ha almeno una soluzione reale.

   Se x è una soluzione reale di q, allora deve essere $x^5 + x^4 = 0$ e $-x^3 + x^2 + 1 = 0$. La prima relazione ha soluzioni $x = 0$ e $x = -1$. Queste non sono soluzioni della seconda relazione e quindi q non ha radici reali.

2. Una funzione tre-lineare su $\mathbb{R}^4$ ha la forma $f(x_1, x_2, x_3)$, con $x_i \in \mathbb{R}^4$, lineare in ogni variabile. L'antisimmetria significa che $f(x, y, z) = -f(y, x, z) = -f(z, y, x) = -f(x, z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^4$. Se $f \in \mathcal{A}$ allora anche $\lambda f \in \mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e se $f, g \in \mathcal{A}$ allora anche $f + g \in \mathcal{A}$, dunque abbiamo uno spazio vettoriale (tutte le altre proprietà seguono banalmente dalle proprietà analoghe di $\mathbb{R}$).

   Data la base standard di $\mathbb{R}^4$, $\{e_i\}_{i=1}^4$, il valore di $f(x_1, x_2, x_3)$ per ogni $x_i \in \mathbb{R}^4$ è univocamente determinato dai valori di $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$. Si noti che l'antisimmetria implica che $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_2}) = 0$ se due degli indici i_j sono uguali.

   Ne segue che $\alpha_4(f) = f(e_1, e_2, e_3), \alpha_3(f) = f(e_1, e_2, e_4), \alpha_2(f) = f(e_1, e_3, e_4), \alpha_1(f) = f(e_2, e_3, e_4)$ determinano tutti i valori non nulli (gli altri si ottengono facendo permutazioni e usando l'antisimmetria). Si noti che abbiamo appena definito $\overline{\alpha} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^4$, $\overline{\alpha}(f) = (\alpha_1(f), \alpha_2(f), \alpha_3(f), \alpha_4(f))$ e che è una funzione lineare e suriettiva. Inoltre è iniettiva perchè se $\overline{\alpha}(f) = 0$ allora $f = 0$. Duque $\mathcal{A}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^4$ e $\dim(\mathcal{A}) = 4$.

   Se volete una dimostrazione più esplicita allora occorre fare qualche calcolo.

   Definiamo $\mathcal{P} = \{p : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\} \quad : \quad \sigma(i) = \sigma(j) \implies i = j\}$ e chiamiamo $\sigma(p)$ la parità della p definita come il numero di permutazioni elementari necessarie per trasformarla in una funzione strettamente crescente. Infine definiamo $\{f_i\}_{i=1}^4$ come, per ogni $p \in \mathcal{P}$,

$$f_i(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \mathrm{Image}(p) \\ \sigma(p) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   e la estendiamo a $(\mathbb{R}^4)^3$ per multilinearità. È facile verificare che $f_i \in \mathcal{A}$ e che $\alpha_k(f_i) = \delta_{ik}$.

   Data $f \in \mathcal{A}$ e, per ogni $x_i \in \mathbb{R}^4$, possiamo scrivere $x_i = \sum_{j=1}^4 x_{i,j} e_j$ e quindi, per la trilinearietà[1]

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{j_1, j_2, j_3 \in \{1, \ldots, 4\}} x_{1,j_1} x_{2,j_2} x_{3,j_3} f(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i,p(i)} f(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i,p(i)} \sum_{k=1}^4 f(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \sigma(p) f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i,p(i)} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) \sum_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=1}^3 x_{i,p(i)} f_k(e_{p(1)}, e_{p(2)}, e_{p(3)}) \\ &= \sum_{k=1}^4 \alpha_k(f) f_k(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

[1] Nelle prime quattro righe si usa continuamente il fatto che gli addendi sono non nulli solo se $k \notin \mathrm{Image}(p)$.

Ovvero $f = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k(f) f_k$. Dunque le f_k generano $\mathcal{A}$. Inoltre è facile verificare che sono linearmente indipendenti, dunque sono una base. Ne segue che $\dim(\mathcal{A}) = 4$.

3. La distanza tra due rette è definita come la distanza minima dei loro punti.

   La seconda retta ha la forma parametrica $(0,0,1) + (-2,1,1)t$. Ne segue che il vettore $(2,1,0) \wedge (-2,1,1) = (1,-2,4)$ è perpendicolare ad entrambe le rette. La prima retta appartiene al piano P_1 di equazioni $\langle (1,-2,4), (x,y,z) \rangle = 8$ e la seconda al piano P_2 di equazioni $\langle (1,-2,4), (x,y,z) \rangle = 4$. Ne segue che la retta $(0,0,1) + \frac{4}{21}(1,-2,4) + (-2,1,1)t$ è parallela alla seconda retta ed appartiene al piano P_1. Poichè le due rette non sono parallele si incontreranno in un punto $p \in P_1$. In tale punto le due rette sono il più vicino possibile, dunque la loro distanza è uguale a quella tra i piani, ovvero, $\frac{4}{\sqrt{21}}$.

   In alternativa se p_1 appartiene alla prima retta e p_2 alla seconda, il quadrato della distanza tra due punti generici sarà

$$\begin{aligned}\|p_1 + (2,1,0)t - p_2 - (-2,1,1)s\|^2 =& \|p_1 - p_2\|^2 + 2\langle p_1 - p_2, (2,1,0)t - (-2,1,1)s \rangle \\ &+ \|(2,1,0)t - (-2,1,1)s\|^2.\end{aligned}$$

   Ne segue che se $\langle p_1 - p_2, (2,1,0) \rangle = \langle p_1 - p_2, (-2,1,1) \rangle = 0$ allora

$$\|p_1 + (2,1,0)t - p_2 - (-2,1,1)s\|^2 = \|p_1 - p_2\|^2 + \|(2,1,0)t - (-2,1,1)s\|^2.$$

   e la distanza minima si ha per $t = s = 0$. Per trovare p_1, p_2 con tale proprietà basta risolvere $p_2 - p_1 = r(1,-2,4)$, ovvero

$$(0,0,2) + (2,1,0)s + (1,-2,4)r = (0,0,1) + (-2,1,1)t.$$

   La soluzione è $s = -\frac{1}{7}$, $t = \frac{5}{21}$ e $r = -\frac{4}{21}$. Dunque $p_1 = (0,0,2) - (2,1,0)\frac{1}{7}$, $p_2 = (0,0,1) + (-2,1,1)\frac{5}{21}$ e la loro distanza è data $\|(1,-2,4)\frac{4}{21}\| = \frac{4}{\sqrt{21}}$.

   Infine, una terza alternativa è di usare la formula (se la conoscete)

$$\left| \frac{\langle (2,1,0) \wedge (-2,1,1), (0,0,2) - (0,0,1) \rangle}{\|(2,1,0) \wedge (-2,1,1)\|} \right| = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

   Ovviamente ci stanno anche molti altri modi di risolvere l'esercizio. Ad esempio la forza bruta: dati due punti generici sulle rette $(0,0,2) + (2,1,0)t$ e $(0,0,1) + (-2,1,1)s$, il quadrato della loro distanza è dato da

$$\|(0,0,1) + (2(t+s), t-s, -s)\|^2 = 5t^2 + 6s^2 + 6st - 2s + 1.$$

   Se teniamo fisso s il valore di t per cui questa espressione è minima è $t = -\frac{3}{5}s$. Usando tale valore di t l'espressione diventa

$$\frac{21}{5}s^2 - 2s + 1.$$

   Questa espressione attiene il minimo per $s = \frac{5}{21}$ e, per tale valore, vale $\frac{16}{21}$ che da una distanza minima di $\frac{4}{\sqrt{21}}$.

4. C è un cono, intersecandolo col piano $P(a,b)$ si ha

$$0 = -(ax - b)^2 + x^2 + y^2 = (1 - a^2)x^2 + y^2 + 2abx - b^2.$$

   Ne segue che se $a = 0$ si ha un cerchio di raggio $|b|$. Se $|a| < 1$ si ha una ellisse. Se $|a| = 1$ si ha la retta $y = 0$ se $b = 0$ e una parabola se $b \neq 0$. Se $|a| > 1$ si ha una iperbole.

5. Ovviamente $v = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono soluzioni. Rimane quindi da analizzare il caso $v \neq 0$. Si noti che $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dunque moltiplicando la relazione per B^{-1} si ha

$$(B^{-1}A - \lambda \mathbb{1})v = 0.$$

Abbiamo dunque il problema agli autovalori per la matrice $B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $(\lambda + 1)^2$, dunque deve essere $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica due. Determiniamo quindi v:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

implica $v_1 = -2v_2$. Quindi le soluzioni sono $\lambda = -1$ e $v = (-2a, a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

In alternativa, e più semplicemente, si può notare che che se $v \neq 0$ allora deve essere $\det(A - \lambda B) = 0$, che da immediatamente lo stesso polinomio.