Geometria 1

Primo Appello-Sessione Estiva, 20-06-19

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si mostri che, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$
$$|z+w| \leqslant |z| + |w|.$$

2. Detta $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ si mostri che l'insieme[1]
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ JAJ = A^T\}$$
è uno spazio vettoriale, se ne determini la dimensione e si esibisca una base.

3. Si studino le soluzioni del sistema di equazioni
$$\begin{aligned} &y + z = a \\ &2x + 3y + 7z = 5 \\ &x - 3y - z = -2 \end{aligned}$$
al variare di $a \in \mathbb{R}$.

4. Dati i vettori $v = (1, 2, 3)$ e $w = (0, 1, 1)$, sia P il piano passante per $(1, 1, 1)$ e parallelo ai vettori v, w. Se ne scriva l'equazione e si calcoli la distanza dell'origine da P.

5. Si trovino gli autovalori della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle matrici due per due a coefficienti reali.

Soluzione

1. Sia $z = a + ib$ e $w = \alpha + i\beta$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora
$$|z + w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$
$$|z + w|^2 = (a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2 = a^2 + 2a\alpha + \alpha^2 + b^2 + 2b\beta + \beta^2.$$
Dunque la disuguaglianza è equivalente a
$$a\alpha + b\beta \leqslant |z||w|$$
che è implicata da
$$a^2\alpha^2 + 2a\alpha b\beta + b^2\beta^2 \leqslant (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)$$
ovvero
$$0 \leqslant a^2\beta^2 + \alpha^2 b^2 - 2a\alpha b\beta = (a\beta - b\alpha)^2$$
che infatti è sempre verifica.

2. Poichè lo spazio delle matrici è uno spazio vettoriale la somma e la moltiplicazione per uno scalare soddisfa tutte le prorietà, basta quindi controllare che lo zero faccia parte di V e che V sia chiuso rispetto alle operazioni. Ovviamente $J0J = 0^T$, quindi $0 \in V$. Basta quindi controllare la chiusura. Per ogni $A, B \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha
$$J(\lambda A + \mu B)J = \lambda JAJ + \mu JBJ = \lambda A^T + \mu B^T = (\lambda A + \mu B)^T$$
Dunque $\lambda A + \mu B \in V$, e quindi V è uno spazio vettoriale. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$, allora
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T = JAJ = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}.$$
Quindi $A \in V$ se e solo se $a = -d$. Se ne evince the le matrici in V hanno la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$
e quindi la dimensione di V è 3. Mentre una base è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sommando la terza alla seconda e la prima (moltiplicata per 3) alla terza si ha
$$\begin{aligned} &y + z = a \\ &3x + 6z = 3 \\ &x + 2z = -2 + 3a \end{aligned}$$
Ovvero
$$\begin{aligned} &y + z = a \\ &x + 2z = 1 \\ &x + 2z = -2 + 3a \end{aligned}$$
che ha soluzione solo se $1 = -2 + 3a$, ovvero $a = 1$. D'altro canto, se $a = 1$, si ha
$$\begin{aligned} &y = 1 - z \\ &x = 1 - 2z \end{aligned}$$
e le soluzioni formano uno spazio unidimensionale.

4. L'equazione del piano è

$$0 = \langle v \wedge w, (x,y,z) - (1,1,1) \rangle = \langle (-1,-1,1), (x,y,z) - (1,1,1) \rangle$$

Ovvero
$$(x-1) + (y-1) - (z-1) = x + y - z - 1 = 0.$$

In alternativa si può calcolare, che è lo stesso,

$$\det \begin{pmatrix} v \\ w \\ (x-1, y-1, z-1) \end{pmatrix} = 0.$$

Una ulteriore possibilità è di scrivere il piano in forma parametrica:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + vt + ws \quad t, s \in \mathbb{R}$$

e quindi eliminare t, s dalle equazioni (ha il vantaggio che non occorre conoscere quasi nulla). La retta perpendicolare al piano e passante per zero è quindi $(-t,-t,t) = t\, v \wedge w$ e perciò il punto del piano più vicino a zero soddisfa

$$(-t-1) + (-t-1) - (t-1) = 0$$

ovvero $t = -\frac{1}{3}$. Ne segue che la distanza è data da $\|(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Dobbiamo calcolare
$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1) \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\lambda(\lambda-2).$$

Dunque gli autovalori sono $\{0, 1, 2\}$.