DETERMINANTE

CARLANGELO LIVERANI

Prima di parlare di determinanti occorre sviluppare un poco di teoria. In particolare è utile comprendere alcune semplici proprietà delle permutazioni e delle funzioni multilineari antisimetriche.

1. Permutazioni

Una permutazione di un insieme finito X è una funzione biunivoca e suriettiva $\sigma : X \to X$. Nel seguito considereremo solo il caso $X = N_n = \{1, \dots, n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Sia S_n l'insieme delle permutazioni di N_n. Si noti che se $\sigma, \pi \in S_n$ allora $\sigma \circ \pi \in S_n$ e la permutazione banale $\sigma(k) = k$ è una identà rispetto alla composizione, chiamiamola id. Inoltre per ogni $\sigma \in S_n$ esiste $\sigma^{-1} \in S_n$ tale che $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$. Dunque le permutazioni formano un gruppo rispetto alla composizione.

Problema 1.1. *Si mostri che S_n ha $n!$ elementi.*

Una permutazione elementare consiste nello scambiare due elementi: si tratta quindi nelle permutazioni $\pi_{k,j} \in S_n$, $k \neq j$, definite come

$$\pi_{k,j}(i) = \begin{cases} i & \text{se } i \notin \{k, j\} \\ j & \text{se } i = k \\ k & \text{se } i = j \end{cases}$$

Problema 1.2. *Si mostri che $\pi_{k,j} \circ \pi_{k,j} = id$.*

Problema 1.3. *Si mostri che per ogni $\sigma \in S_n$ esistono permutazioni elementari $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p$, per qualche $p \in \mathbb{N}$, tali che $\sigma = \pi_{k_p,j_p} \circ \dots \circ \pi_{k_1,j_1}$.*

Problema 1.4. *Dati $i, j, k, l \in N_n$, tutti diversi tra loro, si mostri che*

$$\pi_{i,j} \circ \pi_{l,k} = \pi_{l,k} \circ \pi_{i,j}.$$

Problema 1.5. *Dati $j, j, k \in N_n$, $n \geq 3$, con $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, si mostri che*

$$\pi_{i,j} \circ \pi_{j,k} = \pi_{k,j} \circ \pi_{i,k} = \pi_{k,i} \circ \pi_{i,j}.$$

Lemma 1.6. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p \subset S_n$ sono permutazioni elementari tali che $\pi_{k_p,j_p} \circ \dots \circ \pi_{k_1,j_1} = id$, allora p deve essere pari.*

Proof. Il Lemma è ovviamente vero per $n = 1, 2$. Dimostriamo quindi il Lemma per induzione su n. Supponiamolo valido per $n - 1$ e siano date $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p \subset S_n$ tali che

$$\pi_{k_p,j_p} \circ \dots \circ \pi_{k_1,j_1} = id. \tag{1.1}$$

Date: April 19, 2019.

Se tutti gli indici $k_i, j_j \neq n$ allora n viene sempre mandato in n e quindi le restrizioni delle permutazioni elementari ad N_{n-1} sono elementi di S_{n-1}, perciò devono essere in numero pari per induzione.

Sia quindi l in numero più piccolo per cui $\{k_l, j_l\} \cap \{n\} \neq \emptyset$, diciamo $k_l = n$. Allora, per il Problema 1.4, si può spostare π_{k_l,j_l}, in (1.1), sulla sinistra fino a che non si incontra un s per cui $\{k_s, j_s\} \cap \{j_l, n\} \neq \emptyset$. A questo punto abbiamo $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l}$. Ci sono tre possibilità: 1) $\{k_s, j_s\} = \{n, j_l\}$, ma allora $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l} = id$ e quindi abbiamo che in (1.1) si possono eliminare queste due permutazioni elementari; 2) $j_l \in \{k_s, j_s\}$, ma allora si può usare il Problema 1.5 per scrivere $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l} = \pi_{n,j_l} \circ \pi_{j_l,k_s}$, se $j_s = j_l$, e $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l} = \pi_{n,j_s} \circ \pi_{j_l,j_s}$, se $k_s = j_l$; 3) $n \in \{k_s, j_s\}$, allora si può nuovamente usare il Problema 1.5 per scrivere $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l} = \pi_{n,j_l} \circ \pi_{j_l,j_s}$, se $k_s = n$, e $\pi_{k_s,j_s} \circ \pi_{n,j_l} = \pi_{n,j_l} \circ \pi_{j_l,k_s}$, se $j_s = n$. In altre parole o ci si riduce ad una situazione con due permuatazioni elementari in meno, oppure si può spostare la permutazione che agisce su n di un altro passo sulla sinistra e sulla sua destra n non appare mai. Continuando in questo modo o si eliminano tutte le permutazioni elementari che coinvolgono n o si arriva ad una espressione del tipo

$$\pi_{k'_q,n} \circ \pi_{k'_{q-1},j'_{q-1}} \circ \cdots \circ \pi_{k'_1,j'_1} = id$$

dove $\{k'_l, j'_l\}_{l=1}^q \cup \{k'_q\} \subset N_{n-1}$ e $q = p - 2m$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Ma in quest'ultimo caso si avrebbe $\pi_{k'_q,n} \circ \pi_{k'_{q-1},j'_{q-1}} \circ \cdots \circ \pi_{k'_1,j'_1}(n) = \pi_{k'_q,n}(n) = k'_q \neq n = id(n)$. Dunque non è possibile e deve essere

$$\pi_{k'_q,j'_q} \circ \cdots \circ \pi_{k'_1,j'_1} = id$$

dove $\{k'_l, j'_l\}_{l=1}^q \subset N_{n-1}$ e $q = p - 2m$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Ma allora possiamo restringere tutto a N_{n-1} e abbiamo una composizione di permutazioni elementari di S_{n-1} che danno l'identità e quindi q deve essere pari per l'ipotesi induttiva. Ne segue che anche p è pari, come volevasi dimostrare. □

Problema 1.7. *Si mostri che se $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p$ e $\{\pi_{k'_l,j'_l}\}_{l=1}^q$ sono due insiemi di permutazioni elementari tali che $\pi_{k_p,j_p} \circ \cdots \circ \pi_{k_1,j_1} = \pi_{k'_q,j'_q} \circ \cdots \circ \pi_{k'_1,j'_1}$ allora o p e q sono entrambi pari o sono entrambi dispari.*

Definiamo ora la funzione $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ definita da

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

se esistono $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p$ tali che $\sigma = \pi_{k_p,j_p} \circ \cdots \circ \pi_{k_1,j_1}$.

Problema 1.8. *Si mostri che la funzione ε è ben definita (ovvero non dipende dall'insieme $\{\pi_{k_l,j_l}\}_{l=1}^p$).*

Non sorprendentemente $\varepsilon(\sigma)$ si chiama la parità della permutazione.

Problema 1.9. *Si calcoli la parità di $\pi_{1,3} \in S_5$ e $\sigma \in S_4$ definita da*

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2.$$

Problema 1.10. *Si mostri che, per ongi $\sigma, \pi \in S_n$, $\varepsilon(\sigma \circ \pi) = \varepsilon(\sigma)\sigma(\pi)$ e $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.*

2. Funzioni antisimetriche

Dato uno spazio vettoriale V una funzione $f : V^n \to \mathbb{R}$ si dice n-multilineare antisimetrica se

(1) per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

(2) per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_1, \dots, v_n, w \in V$ si ha

$$f(v_1, \dots, v_i + w, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

(3) per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ e $v_1, \dots, v_n, w \in V$ si ha

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

Dalle precedenti proprietà segue che se $v_i = 0$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, allora

$$f(v_1, \dots, 0, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, -1 \cdot 0, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, 0, \dots, v_n)$$

quindi $f(v_1, \dots, 0, \dots, v_n) = 0$. D'altro canto se $v_i = v_k = w$ per qualche $i, k \in \{1, \dots, n\}$ (ovvero due vettori sono uguali), allora

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_n) &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_n) \\ &= -f(v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &= -f(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_n) \end{aligned}$$

quindi $f(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_n) = 0$.

Problema 2.1. *Si mostri che se $v_i = \lambda v_k$ per qualche $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.*

Teorema 2.2. *Se $V = \mathbb{R}^n$ allora, date due funzioni n-multilineari antisimetriche f, g non identicamente nulle, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f = \lambda g$.*

Proof. Dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ si costruisca la matrice di cui v_i è l'iesima riga. Si noti che se si applica il metodo di Gauss e w_i sono le righe della matrice triangolare superiore così ottenuta allora $f(v_1, \dots, v_n) = f(w_1, \dots, w_n)$ e lo stesso per g. Infatti ogni passo del metodo di Gauss corrisponde a sommare $f(v_1, \dots, v_n)$ ad $f(v_1, \cdots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$ con w proporzionale a qualche v_k, $k \neq i$, e quindi nullo. Ne segue che, ponendo

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix},$$

i vettori w_k formano la matrice

$$B = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{n,1} & \cdots & w_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & * & * & * \\ 0 & p_2 & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & .. & 0 & p_n \end{pmatrix}.$$

Ora se $p_n = 0$, si ha che $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ e lo stesso accade facendo lo stesso ragionamento per $g(v_1, \dots, v_n)$. Se $p_n \neq 0$ allora possiamo sommare al vettore w_i il vettore $-\frac{w_{i,n}}{p_n} w_n$. Questo non cambia il valore di una funzione multilineare antisimetrica ma fa si che il suo valore sia uguale a quello calcolato usando le righe della matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} p_1 & * & * & 0 \\ 0 & p_2 & * & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & .. & 0 & p_n. \end{pmatrix}.$$

Facendo lo stesso ragionamento per $p_{n-1}, \dots, p_1$ si avrebbe che o $f(v_1, \dots, v_n) = g(v_1, \dots, v_n) = 0$ oppure[1]

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(p_1 e_1, p_2 e_2, \dots, p_n e_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \prod_{i=1}^{n} p_i$$
$$g(v_1, \dots, v_n) = f(p_1 e_1, p_2 e_2, \dots, p_n e_n) = g(e_1, e_2, \dots, e_n) \prod_{i=1}^{n} p_i,$$

dove e_i è il vettore con coordinate tutte nulle meno la iesima che è uguale a uno. Dunque, per ipotesi, $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ e $g(e_1, e_2, \dots, e_n)$ devono essere non nulle e il teorema segue. □

Problema 2.3. *Si mostri che le funzioni lineari antisimetriche da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ formano uno spazio vettoriale. Si dica quale è la dimensione massima di tale spazio per $n = m$, per $n > 2$ e $m = 2$, e per $m > n$.*

3. Determinante

Data una matrice A $n \times n$ con righe $v_1, \dots, v_n$ si dice determinante della matrice il valore $f(v_1, \dots, v_n)$ dove f è una funzione n-multineare antisimetrica tale che $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Si noti che il Teorema 2.2 dimostra che la tale funzione è unica. Tuttavia rimane una domanda: esiste una tale funzione?

Infatti nella trattazione precedente abbiamo discusso varie proprietà delle funzioni multilineari antisimetriche ma non abbiamo mai dimostrato che esse esistano a parte il caso banale $f \equiv 0$. Rimane quindi un dubbio: stiamo parlando del nulla?

Teorema 3.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione*[2]

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} v_{i,\sigma(i)}$$

è una funzione multilineare antisimetrica tale che $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

---

[1] Come il simbolo $\sum_{i=1}^n a_i$ significa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, così il simbolo $\Pi_{i=1}^n a_i$ sta per il prodotto $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$.

[2] Un insieme finito $\mathcal{A}$ si dice di cardinalità n se esiste una funzione biunivoca $f : \{1, \dots, n\} \to \mathcal{A}$. In tal caso possiamo scrivere i suoi elementi come $a_i = f(i)$, ovvero $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^n$. Con questa notazione, per ogni funzione $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, il simbolo $\sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi(a)$ significa $\sum_{i=1}^n \varphi(a_i)$.

Proof. Cominciamo con l'antisimmetria[3]

$$\begin{aligned} f(v_{\pi_{j,k}(1)},\dots,v_{\pi_{j,k}(n)}) &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n v_{\pi_{j,k}(i),\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n v_{i,\sigma\circ\pi_{jk}(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma\circ\pi_{j,k})\prod_{i=1}^n v_{i,\sigma(i)} = -\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n v_{i,\sigma(i)} \\ &= -f(v_1,\dots,v_n). \end{aligned}$$

Per verificare la multilinearità basta quindi verificarla rispetto al primo argomento

$$\begin{aligned} f(v_1+w_1,v_2,\dots,v_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)[v_{1,\sigma(1)}+w_{1,\sigma(1)}]\prod_{i=2}^n v_{i,\sigma(i)} \\ &= f(v_1,v_2,\dots,v_n)+f(w_1,v_2,\dots,v_n). \end{aligned}$$

Per concludere calcoliamo

$$f(e_1,\dots,e_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n \delta_{i,\sigma(i)} = \sigma(id) = 1.$$

□

Problema 3.2. *Si mostri che il determinante di una matrice è il prodotto dei pivot. (suggerimento: è ovvio se avete capito la dimostrazione del Teorema 2.2).*

Data una matrice quadrata A indichiamo il suo determinante con $\det(A)$.

Teorema 3.3. *Per ogni matrice quadrata A si ha* $\det(A)=\det(A^T)$.

Proof. Data la matrice $A=(a_{ij})$ si ha, ricordando il Problema 1.10,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)i} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \det(A^T). \end{aligned}$$

□

Dal teorema precedente segue che avremmo potuto anche definire il determinante come una funzione multilineare antisimetrica delle colonne.

Teorema 3.4. *Per ogni due matrici $n\times n$ A,B si ha* $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

---

[3] Nel seguito useremo spesso un cambio di ordine nelle somme e nei prodotti. Dato un insieme finito $\mathcal{A}$, una funzione biunivoca $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ e un funzione $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ si ha $\sum_{a\in\mathcal{A}}\varphi(a)=\sum_{b\in\mathcal{A}}\varphi(f(b))$. Infatti questo corrisponde a sommare esattamente gli stessi elementi ma in un ordine diverso. Le stesse considerazioni si applicano ai prodotti.

Proof. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ allora $AB = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ quindi[4]

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k\sigma(i)} \right) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^n \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)}\end{aligned}$$

Per continuare supponiamo che nel vettore $(k_1, \dots, k_n)$ ci siano due entrate uguali, ovvero $k_j = k_l = s$ per qualche $j \neq l \in \{0, 1 \dots, n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{j,s} a_{l,s} b_{s,\sigma(j)} b_{s,\sigma(l)} \prod_{i\notin\{j,l\}} a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{j,s} a_{l,s} b_{s,\sigma\circ\pi_{l,j}(j)} b_{s,\sigma\circ\pi_{l,j}(l)} \prod_{i\notin\{j,l\}} a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\pi_{l,j}) a_{j,s} a_{l,s} b_{s,\sigma(j)} b_{s,\sigma(l)} \prod_{i\notin\{j,l\}} a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} \\ &= -\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)}.\end{aligned}$$

Ovvero $\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i\sigma(i)} = 0$. Ma questo significa che la somma è limitata alle n-nuple in cui tutte le entrate sono distinte, ovvero alle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\pi\in S_n} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} b_{\pi(i)\sigma(i)} = \sum_{\pi\in S_n} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \prod_{j=1}^n b_{j\sigma\circ\pi^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} = \sum_{\pi\in S_n} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\sigma(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} \\ &= \left[\sum_{\pi\in S_n} \sigma(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \right] \left[\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} \right] = \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

□

Per continuare consideriamo le immersioni $S_j : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots, n\}$ definite da

$$T_j(k) = \begin{cases} k & \text{if } k < j \\ k+1 & \text{if } k \geq j \end{cases}$$

ovvero l'immagine non contiene j. Allora, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{m=1}^n a_{m\sigma(m)} = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(j)=k}} \varepsilon(\sigma) a_{jk} \prod_{m=1}^{n-1} a_{T_j(m)\sigma(T_j(m))}.$$

[4] Se la seconda uguaglianza non vi è chiara dimostratela per induzione.

Problema 3.5. *Per ogni $\sigma \in S_n$, $\sigma(j) = k$, sia $\pi = T_k^{-1} \circ \sigma \circ T_j$. Si mostri che π è ben definita e inoltre $\pi \in S_{n-1}$. Si mostri che $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\sigma)(-1)^{k+j}$,*

Allora,

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \varepsilon(\pi)(-1)^{k+j} a_{jk} \prod_{m=1}^{n-1} a_{T_j(m)T_k(\pi(m))}$$

Ma $(a_{T_j(i)T_k(l)})$, $i, l \in \{1, \dots, n-1\}$, sono gli elementi della matrice A in cui è stata eliminata la j-esima riga e la k-esima colonna. Tali matrici si chiamano minori e si denotano con A_{jk}. Abbiamo quindi dimostrato la formula (detta *formula di Laplace*)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det(A_{jk}) \tag{3.1}$$

che può essere utilmente usata per calcolare i determinanti in maniera ricorsiva.

Problema 3.6. *Si dimostri che, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, si ha*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}).$$

(Suggerimento: si usi il Teorema 3.3 e l'equazione (3.1).)

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it