Fisica Matematica II

Soluzioni appello 10-07-2003

1. Si controlla immediatamente che la condizione iniziale non è una caratteristica. Ci si riconduce dunque al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y^2 - z^2 \\
\dot{y} &= -xy \\
\dot{z} &= xz \\
z(0) &= s \\
y(0) &= s \\
x(0) &= s.
\end{aligned}$$

   Si ottiene:

$$\dot{y}y + \dot{z}z = x(z^2 - y^2) = -\dot{x}x; \quad \dot{y}xz = -\dot{z}xy.$$

   Da cui si ahnno i due integrali del moto

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3s^2; \quad yz = s^2$$

   cioè

$$u = \frac{3y - \sqrt{5y^2 - 4x^2}}{2}.$$

2. Si calcola

$$\int_Q |\nabla u|^2 = \int_Q \text{div } u\nabla u - u\Delta u = \int_{\partial Q} u\frac{\partial u}{\partial n} + \int_Q \lambda u^2 = \lambda \int_Q u^2$$

   Dunque $\lambda > 0$. Nota inoltre che $u = \sin \pi x \ \ \sin \pi y$ risolve il probelma e quindi si puo avere $\lambda = 2\pi^2$. In effetti questo il valore minimo possibile di λ. Pe verificarlo si noti che una soluzione deve essere infinitamente differenziabile e quindi si puo scrivere come una serie seno di Fourier

$$u(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} u_{nm} \sin n\pi x \sin m\pi y.$$

   Sostituendo nell'equazione si ottine che esistono soluzioni solo se $\lambda = 2(n^2 + m^2)\pi^2$.

3. La soluzione è data da
$$u_a(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{x^2}{a}} dy.$$
da cui $\lim_{a\to\infty} u_a(x,1) = 0$.

4. Si cerca una sol del tipo
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x,$$
che soddisfa le condizioni al contorno. Sostituendo si ottiene
$$c_n''(t) = -n^2 c_n(t) + b_n e^{-t}$$
$$c_n(0) = 0; \;\; c_n'(0) = 0,$$
where $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$. Cioè
$$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n}[1 - (-1)^n].$$
La soluzione è dunque $c_n = 0$ per n pari e
$$c_n(t) = \frac{b_n}{n} \int_0^t e^{-s} \sin n(t-s) \, ds.$$
Finalmente,
$$\frac{d}{dt} E(t) = e^{-t} \int_0^1 u_t(x,t) dx.$$
Dunque il limite richiesto è nullo.