Fisica Matematica II

Soluzioni appello 17-06-2003

1. Si controlla immediatamente che la condizione iniziale non è una caratteristica. Ci si riconduce dunque al sistema
$$\begin{aligned} \dot{x} &= xz \\ \dot{y} &= 1 \\ \dot{z} &= 1 \\ z(0) &= \frac{s}{2} \\ y(0) &= s \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$
Si ottengono facilmente i seguenti integrali del moto:
$$z - y = c_1 \qquad \ln x - \frac{z^2}{2} = c_2.$$
Il secondo si ottine integrando $\dot{x} = xz\dot{z}$, per separazione di variabili. Sostituendo le condizioni iniziali si ottine $c_1 = -\frac{s}{2}$, $c_2 = \frac{s^2}{8}$. Dunque
$$-\ln x + \frac{z^2}{2} = \frac{s^2}{8} = \frac{1}{2}(z-y)^2$$
da cui segue
$$z = \frac{2\ln x + y^2}{2y}.$$

2. Si cerca una soluzione del tipo
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin kx$$
che soddisfa le condizioni al contorno. Sostituendo nell'equazione si trova
$$\dot{c}_k + k^2 c_k = f_k \qquad c_k(0) = h_k$$
dove f_k e h_k sono i coefficienti della serie dei seni di Fourier. La soluzione è
$$c_k(t) = (h_k - \frac{f_k}{k^2})e^{-k^2 t} + \frac{f_k}{k^2}.$$

Si noti che se $f \in L^\infty$ allora gli f_k sono limitati e la serie con coefficienti c_k converge uniformemente per ogni $t \geq t_0 > 0$. Dunque si puo prendere il limite per $t \to \infty$ ottenendo

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k^2} \sin kx.$$

Chiaramente

$$v_{xx} = -f(x)$$

cioè v è una soluzione stazionaria (non dipendente dal tempo) della equazione originaria.

3. Se si introduce la relazione di equivalenza, in $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \sim (z,t)$ se e solo se $(x,y)-(z,t) = nv + mw$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ si ottine un toro bidimensionale e la funzione f è ben definita su di esso. In altre parole f è periodica sul reticolo formato dai vettori v, w (che, per le persone prone alla geometria, può essere visto come il ricoprimento universale del toro di cui sopra). Ad ogni modo ciò significa che la funzione f è limitata su $\mathbb{R}^2$ e dunque costante per il teorema di Liuouville.

4. Prima di tutto si noti che ponendo $v(x,t) = u(x,t) - \sin x$, si ha

$$\begin{aligned}
&v_{xx} = v_{tt} \\
&v(0,t) = 0 \quad t > 0 \\
&v(x,0) = x - \sin x; \; v_t(x,0) = 0 \quad x \geq 0.
\end{aligned}$$

Secondo, si consideri il problema

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_{xx} = \tilde{v}_{tt} \\
&\tilde{v}(x,0) = x - \sin x; \; \tilde{v}_t(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Chiaramente ogni soluzione dispari di tale problema è una soluzione del problema originario. D'altro canto la soluzione dell'ultimo problema è (formula di d'Alembert)

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{1}{2}\{2x - \sin(x+t) - \sin(x-t)\} = x - \sin x \cos t.$$

che è chiaramente dispari. Quindi

$$u(x,t) = x + \sin x - \sin x \cos t.$$