

# Fisica Matematica II

## Soluzioni appello 17-06-2003

1. Si controlla immediatamente che la condizione iniziale non è una caratteristica. Ci si riconduce dunque al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xz \\ \dot{y} &= 1 \\ \dot{z} &= 1 \\ z(0) &= \frac{s}{2} \\ y(0) &= s \\ x(0) &= 1.\end{aligned}$$

Si ottengono facilmente i seguenti integrali del moto:

$$z - y = c_1 \quad \ln x - \frac{z^2}{2} = c_2.$$

Il secondo si ottiene integrando  $\dot{x} = xz\dot{z}$ , per separazione di variabili. Sostituendo le condizioni iniziali si ottiene  $c_1 = -\frac{s}{2}$ ,  $c_2 = \frac{s^2}{8}$ . Dunque

$$-\ln x + \frac{z^2}{2} = \frac{s^2}{8} = \frac{1}{2}(z - y)^2$$

da cui segue

$$z = \frac{2 \ln x + y^2}{2y}.$$

2. Si cerca una soluzione del tipo

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin kx$$

che soddisfa le condizioni al contorno. Sostituendo nell'equazione si trova

$$\dot{c}_k + k^2 c_k = f_k \quad c_k(0) = h_k$$

dove  $f_k$  e  $h_k$  sono i coefficienti della serie dei seni di Fourier. La soluzione è

$$c_k(t) = (h_k - \frac{f_k}{k^2})e^{-k^2 t} + \frac{f_k}{k^2}.$$

Si noti che se  $f \in L^\infty$  allora gli  $f_k$  sono limitati e la serie con coefficienti  $c_k$  converge uniformemente per ogni  $t \geq t_0 > 0$ . Dunque si può prendere il limite per  $t \rightarrow \infty$  ottenendo

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k^2} \sin kx.$$

Chiaramente

$$v_{xx} = -f(x)$$

cioè  $v$  è una soluzione stazionaria (non dipendente dal tempo) della equazione originaria.

3. Se si introduce la relazione di equivalenza, in  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \sim (z, t)$  se e solo se  $(x, y) - (z, t) = nv + mw$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$  si ottiene un toro bidimensionale e la funzione  $f$  è ben definita su di esso. In altre parole  $f$  è periodica sul reticolo formato dai vettori  $v, w$  (che, per le persone prone alla geometria, può essere visto come il ricoprimento universale del toro di cui sopra). Ad ogni modo ciò significa che la funzione  $f$  è limitata su  $\mathbb{R}^2$  e dunque costante per il teorema di Liouville.
4. Prima di tutto si noti che ponendo  $v(x, t) = u(x, t) - \sin x$ , si ha

$$\begin{aligned} v_{xx} &= v_{tt} \\ v(0, t) &= 0 \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= x - \sin x; \quad v_t(x, 0) = 0 \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Secondo, si consideri il problema

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{xx} &= \tilde{v}_{tt} \\ \tilde{v}(x, 0) &= x - \sin x; \quad \tilde{v}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chiaramente ogni soluzione dispari di tale problema è una soluzione del problema originario. D'altro canto la soluzione dell'ultimo problema è (formula di d'Alembert)

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{1}{2} \{2x - \sin(x+t) - \sin(x-t)\} = x - \sin x \cos t.$$

che è chiaramente dispari. Quindi

$$u(x, t) = x + \sin x - \sin x \cos t.$$