Fisica Matematica II

Soluzioni esonero 09-06-2003

1. Si cerca una soluzione del tipo $u(x,t) = xe^{-t} + v(x,t)$. Allora

$$\begin{aligned}&v_{xx} - v = v_t\\ &v(x,0) = 1 - x;\ v(1,t) = 0;\ v_x(0,t) = 0.\end{aligned}$$

Si procede poi per separazione di variabili. Cioè

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos(n + \frac{1}{2})\pi x$$

che soddisfa le condizioni al contoro. Sostituendo si ha

$$c_n' = -[1 - (n + \frac{1}{2})^2\pi^2]c_n; \quad c_n(0) = b_n$$

dove

$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos(n + \frac{1}{2})\pi x = \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

Dunque

$$c_n(t) = e^{-[1-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2]t} b_n.$$

2. Si risolve per separazione di variabili nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x.$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}&c_n'' = -n^2\pi^2 c_n + a_n\\ &c_n(0) = c_n'(0) = 0.\end{aligned}$$

Dove

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x \; dx.$$

Le cui soluzioni sono

$$c_n(t) = \frac{a_n}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi t).$$

3. Si ha
$$\hat{f}(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$
Da cui
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} g(\xi) d\xi = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} g(\alpha z) dz = g(0).$$

4. Poichè la velocità di propagazione è limitata da 1, segue che u è a supporto compatto per ogni t. Dunque è facile verificare che l'energia totale
$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2$$
è ben definita e costante (basta derivare rispetto al tempo e usare il fatto che u risolve l'equazione). Inoltre $e(0) = E(0)$, dunque $e(t) \leq E(t) = E(0) = e(0)$.