

Fisica Matematica II

Soluzioni esonero 09-06-2003

1. Si cerca una soluzione del tipo $u(x, t) = xe^{-t} + v(x, t)$. Allora

$$\begin{aligned}v_{xx} - v &= v_t \\ v(x, 0) &= 1 - x; \quad v(1, t) = 0; \quad v_x(0, t) = 0.\end{aligned}$$

Si procede poi per separazione di variabili. Cioè

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$$

che soddisfa le condizioni al contorno. Sostituendo si ha

$$c'_n = -\left[1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2\right] c_n; \quad c_n(0) = b_n$$

dove

$$b_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \, dx = \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}.$$

Dunque

$$c_n(t) = e^{-[1 - (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2]t} b_n.$$

2. Si risolve per separazione di variabili nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x.$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}c''_n &= -n^2 \pi^2 c_n + a_n \\ c_n(0) &= c'_n(0) = 0.\end{aligned}$$

Dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx.$$

Le cui soluzioni sono

$$c_n(t) = \frac{a_n}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi t).$$

3. Si ha

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Da cui

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} g(\xi) d\xi = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} g(\alpha z) dz = g(0).$$

4. Poichè la velocità di propagazione è limitata da 1, segue che u è a supporto compatto per ogni t . Dunque è facile verificare che l'energia totale

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2$$

è ben definita e costante (basta derivare rispetto al tempo e usare il fatto che u risolve l'equazione). Inoltre $e(0) = E(0)$, dunque $e(t) \leq E(t) = E(0) = e(0)$.