

Fisica Matematica II

Soluzioni esonero 30-04-2003

1. La condizione iniziale non è una caratteristica. Dunque

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 1 - y^2 \\ \dot{z} &= z \\ x &= s; \quad y = 0; \quad z = s.\end{aligned}$$

Dalla seconda segue che

$$\frac{d}{dt} \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = 1.$$

Dunque si ha, per ogni $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\ln z - x &= \ln s - s \\ \ln z - \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} &= s.\end{aligned}$$

Che implica

$$u(x, y) = x \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

La soluzione è unica nel dominio $-1 < y < 1$.

2. Se la funzione è armonica allora $f''g + g''f = 0$ e questo è possibile solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f'' = \lambda f$ e $g'' = -\lambda g$. Le uniche soluzioni di tali equazioni sono

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{for } \lambda > 0 \\ 1, x & \text{for } \lambda = 0 \\ \cos \sqrt{-\lambda}x, \sin \sqrt{-\lambda}x & \text{for } \lambda < 0, \end{cases}$$

assieme alle analoghe espressioni per g . Moltiplicando si ottengono tutte le possibilità.

3. Il cambio di variabili $(\xi, \eta) = (2x, y)$ trasforma l'equazione in una equazione di Laplace in un anello. L'esistenza ed unicità seguono dunque dai soliti argomenti.

4. Sia u una funzione armonica, si consideri $u \circ \Psi$. Un semplice calcolo mostra che

$$\partial_{x_i x_i} (u \circ \Psi) = \sum_{k,j} (\partial_{x_k x_j} u) \circ \Psi A_{ki} A_{ji}.$$

Dunque si vuole che, per ogni u armonica,

$$0 = \Delta(u \circ \Psi) = \sum_{k,j} (AA^*)_{jk} (\partial_{x_k x_j} u) \circ \Psi = \text{Tr } AA^* U,$$

Dove $U_{kj} := (\partial_{x_k x_j} u) \circ \Psi$. Nota che $\text{Tr } U = 0$. Ovviamente una possibile soluzione è $AA^* = \lambda \text{Id}$. D'altra parte $u = x_k x_j$, $k \neq j$, sono funzioni analitiche che implicano che deve essere

$$0 = \sum_{pq} (AA^*)_{pq} \delta_{pk} \delta_{qj}$$

cioè $(AA^*)_{kj} = \lambda_k \delta_{kj}$. Considera ora le funzioni armoniche $u = x_k^2 - x_j^2$. Usando queste si ottiene $\lambda_k = \lambda_j$. Dunque $A^* A$ deve essere un multiplo dell'identità. Ciò implica che A è proporzionale ad una matrice unitaria od una matrice unitaria per una riflessione.