Fisica Matematica II

Esonero 09-06-2003

1. Si determini la soluzione $u(x,t)$ di
$$\begin{aligned}
&u_{xx} - u = u_t \quad x \in (0,1);\ t > 0\\
&u(x,0) = 1 \quad x \in (0,1)\\
&u(1,t) = e^{-t};\ u_x(0,t) = e^{-t} \quad t > 0.
\end{aligned}$$

2. Si determini la soluzione $u(x,t)$ di
$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + x \quad x \in (0,1);\ t > 0\\
&u(x,0) = 0;\ u_x(x,0) = 0 \quad x \in (0,1)\\
&u(0,t) = 0;\ u(1,t) = 0 \quad t > 0.
\end{aligned}$$

3. Date le funzioni $f_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|\alpha}$, $\alpha > 0$, siano $\hat{f}_\alpha$ le loro trasformate di Fourier. Si calcoli
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\alpha(\xi) g(\xi) d\xi$$
per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

4. Si consideri l'equazione
$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R};\ t > 0\\
&u(x,0) = g(x);\ u_x(x,0) = 0,
\end{aligned}$$
con $\operatorname{supp} g \subset [-1,1]$. Si definisca l'energia $e(t)$ contenuta nell'intervallo $[-1,1]$ al tempo t
$$e(t) := \int_{-1}^{1} u_t(y,t)^2 + u_x(y,t)^2 \, dy.$$
Si dimostri che $e(t) \le e(0)$ per ogni $t \ge 0$.

Avete 2 ore di tempo. Ogni esercizio vale dieci punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio $\geq$ 18. Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.