

Fisica Matematica II

Esonero 09-06-2003

1. Si determini la soluzione $u(x, t)$ di

$$\begin{aligned}u_{xx} - u &= u_t \quad x \in (0, 1); \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 \quad x \in (0, 1) \\ u(1, t) &= e^{-t}; \quad u_x(0, t) = e^{-t} \quad t > 0.\end{aligned}$$

2. Si determini la soluzione $u(x, t)$ di

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} + x \quad x \in (0, 1); \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0; \quad u_x(x, 0) = 0 \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) &= 0; \quad u(1, t) = 0 \quad t > 0.\end{aligned}$$

3. Date le funzioni $f_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$, siano $\hat{f}_\alpha$ le loro trasformate di Fourier. Si calcoli

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\alpha(\xi) g(\xi) d\xi$$

per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

4. Si consideri l'equazione

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad x \in \mathbb{R}; \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x); \quad u_x(x, 0) = 0,\end{aligned}$$

con $\text{supp } g \subset [-1, 1]$. Si definisca l'energia $e(t)$ contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$ al tempo t

$$e(t) := \int_{-1}^1 u_t(y, t)^2 + u_x(y, t)^2 dy.$$

Si dimostri che $e(t) \leq e(0)$ per ogni $t \geq 0$.

Avete 2 ore di tempo. Ogni esercizio vale dieci punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18 . Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.