

Fisica Matematica II

Esonero 30-04-2003

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$(1 - y^2)u_y + u_x = u$$
$$u(x, 0) = x.$$

Discutere esistenza, unicità e dominio delle soluzioni.

2. Si classifichino tutte le funzioni armoniche su \mathbb{R}^2 della forma $f(x)g(y)$.
3. Si consideri il seguente problema di Dirichlet sul dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < 4x^2 + y^2 < 4\}$.

$$u_{xx} + 4u_{yy} = 0$$
$$u(x, y) = f(x) \quad \text{per } 4x^2 + y^2 = 1$$
$$u(x, y) = g(y) \quad \text{per } 4x^2 + y^2 = 4.$$

Si discuta l'esistenza e l'unicità. Si calcoli

$$\int_{\Omega} u_x,$$

in funzione di f, g . Infine, si trovi la soluzione per $f(x) = 0$, $g(y) = 1$.

4. Si consideri il cambio di variabili $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definito da $\Psi(x) = Ax + b$. Si classifichino tutti gli A, b per cui Ψ manda funzioni armoniche in funzioni armoniche.