Fisica Matematica II

Appello 06-10-2003

1. Si determini una soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &yu_x - xu_y = u^2 \\ &u(x,0) = x^2 \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   e se ne discuta dominio e unicità.

2. Si trovi una soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = x^2y^2 \qquad x \in (0,1)\ \ y \in (0,2), \\ &u(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \partial([0,1] \times [0,2]). \end{aligned}$$

   Se ne discuta unicità e regolarità.

3. Si consideri l'equazione

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2] \\ &u(x,0) = x; \quad u_t(x,0) = 0 \\ &u(0,t) = 0; \quad u(2,t) = 1. \end{aligned}$$

   Si determini la soluzione e si mostri che l'energia si conserva.

4. Sia u la soluzione dell'equazione del calore

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ &u(x,0) = \frac{x^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

   Si calcoli,

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t).$$

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale dieci punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18. Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.