

# Fisica Matematica II

Appello 06-10-2003

1. Si determini una soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}yu_x - xu_y &= u^2 \\ u(x, 0) &= x^2 \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e se ne discuta dominio e unicità.

2. Si trovi una soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= x^2 y^2 \quad x \in (0, 1) \quad y \in (0, 2), \\ u(x, y) &= 0 \quad \forall (x, y) \in \partial([0, 1] \times [0, 2]).\end{aligned}$$

Se ne discuta unicità e regolarità.

3. Si consideri l'equazione

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2] \\ u(x, 0) &= x; \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= 0; \quad u(2, t) = 1.\end{aligned}$$

Si determini la soluzione e si mostri che l'energia si conserva.

4. Sia  $u$  la soluzione dell'equazione del calore

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) &= \frac{x^2}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Si calcoli,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t).$$