Fisica Matematica II

Appello 10-07-2003

1. Si consideri la soluzione dell'equazione

$$(y^2 - u^2)u_x - xyu_y = xu$$
$$u(s,s) = s \quad s > 0.$$

2. Sia $Q := (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ e sia $u : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ una soluzione, non identicamente nulla, di

$$\Delta u = -\lambda u$$
$$u|_{\partial Q} = 0.$$

   Si dimostri che deve essere $\lambda > 0$. Si cerchi di determinare il λ minimo possibile.

3. Per ogni $a > 0$ sia $u_a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la soluzione di

$$\partial_t u_a = \Delta u_a$$
$$u_a(x,0) = a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{a}}.$$

   Si calcoli

$$\lim_{a \to 0} u_a(x,1).$$

4. Si determini la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} \qquad 0 < x < 1;\ t > 0$$
$$u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0.$$

   Si calcoli inoltre $\lim_{t\to\infty} E(t)$ per

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + u_x^2 \, dx.$$

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale dieci punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18. Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.