Fisica Matematica II

Prima Prova di Autovalutazione

1. Si risolva il seguente problema di Cauchy
$$\begin{aligned} &u^2 u_x + u_y = 0 \\ &u(x,0) = x. \end{aligned}$$

2. Sia $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\operatorname{supp} j \subset [0,1]$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
$$j_\varepsilon(x) := \frac{j(\varepsilon^{-1}\|x\|)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} j(\|y\|)dy}.$$
Si dimostri che, per ogni $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) f(y) f(y) dy = f(x).$$

3. Si risolva il seguente problema di Dirichlet nel dominio $\Omega := [-1,1]^2$
$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \\ &u(-1,y) = u(1,y) = 0 \quad \forall y \in [-1,1] \\ &u(x,-1) = u(x,1) = \sin(\pi x) \quad \forall x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

4. Si calcoli il Laplaciano in coordinate polari in $\mathbb{R}^3$ e si trovino le equazioni per la parte radiale e angolare di funzioni armoniche.

Avete 2 ore di tempo. Ogni esercizio vale dieci punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio $\geq$ 18. Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.