

Fisica Matematica II

Prima Prova di Autovalutazione

1. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{aligned}u^2 u_x + u_y &= 0 \\ u(x, 0) &= x.\end{aligned}$$

2. Sia $j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\text{supp } j \subset [0, 1]$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$j_\varepsilon(x) := \frac{j(\varepsilon^{-1}\|x\|)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} j(\|y\|) dy}.$$

Si dimostri che, per ogni $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x - y) f(y) dy = f(x).$$

3. Si risolva il seguente problema di Dirichlet nel dominio $\Omega := [-1, 1]^2$

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \\ u(-1, y) &= u(1, y) = 0 \quad \forall y \in [-1, 1] \\ u(x, -1) &= u(x, 1) = \sin(\pi x) \quad \forall x \in [-1, 1].\end{aligned}$$

4. Si calcoli il Laplaciano in coordinate polari in $\mathbb{R}^3$ e si trovino le equazioni per la parte radiale e angolare di funzioni armoniche.