

MECCANICA QUANTISTICA

CARLANGELo LIVERANI

1. MECCANICA QUANTISTICA: UNA INTRODUZIONE ISTANTANEA E IRRITUALE

La Meccanica Quantistica è radicalmente diversa dalla meccanica classica e si basa sui seguenti principi:¹

- (1) *Lo spazio degli stati di un sistema è la palla unitaria di uno spazio di Hilbert sul campo dei complessi;*²
- (2) *gli osservabili sono gli operatori Hermitiani. Dato un osservabile A il risultato di una misura di A quando il sistema è nello stato v è un variabile aleatoria determinata unicamente da v e A . I risultati possibili di una singola misura sono dati dagli autovalori di A e il valore medio è dato da $\frac{\langle v, Av \rangle}{\|v\|}$.*³
- (3) *Se A, B sono due osservabili e $AB = BA = 0$ allora la variabile aleatoria associata alla misura di $A+B$ è la somma delle variabili aleatorie associate ad A e B , assumendo che il loro prodotto sia nullo.*⁴
- (4) *Se si ripete la stessa misura “istantaneamente” si ottiene lo stesso risultato.*
- (5) *la dinamica è lineare e lascia invariante la norma di uno stato. Inoltre ogni stato è raggiungibile dalla dinamica.*⁵
- (6) *Dato un sistema S_1 con spazio degli stati H_1 e un sistema S_2 con spazio degli stati H_2 , lo spazio degli stati associato al sistema S ottenuto considerando assieme S_1 e S_2 è dato da $H = H_1 \otimes H_2$.*

Nel seguito discutiamo le conseguenze di questi principi.

2. MISURA

Prima di tutto ogni operatore Hermitiano A è diagonalizzabile. Quindi, se A è compatto, possiamo scriverlo come

$$Av = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \langle v, v_k \rangle v_k$$

per una qualche base ortonormale $\{v_k\}$. Ne segue che se il sistema è nello stato v_k allora $\langle v_k, Av_k \rangle = a_k$. Sia p_j la probabilità di ottenere a_j come risultato di una

Date: May 28, 2021.

¹La parola *sistema* è un concetto primitivo e sta a significare ciò che si vuole descrivere.

²In meccanica classica lo spazio degli stati si chiama spazio delle fase ed è $\mathbb{R}^{2n}$ o, più in generale, un manifold simplettico.

³In meccanica classica gli osservabili sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e, dato uno stato $x \in \mathbb{R}^{2n}$, il risultato della misura è sempre lo stesso ed è $f(x)$.

⁴Questo è vero anche classicamente, solo che classicamente tutto commuta.

⁵In dinamica classica la dinamica è data da una ODE ed è, in generale, non lineare.

misura, allora si ha che⁶

$$a_k = \langle v_k, Av_k \rangle = \sum_j p_j a_j.$$

Tuttavia anche l'operatore $A_k v = a_k \langle v, v_k \rangle v_k$ è Hermitiano, quindi un osservabile. I suoi autovalori sono dati da $\{0, a_k\}$ che sono quindi gli unici risultati possibili di una misura, ma poichè la media è ancora a_k , allora il risultato deve essere sempre a_k . Dunque la variabile aleatoria associata alla misura di A_k è in realtà deterministica e sempre uguale ad a_k . D'altro canto se misuriamo A_k nello stato v_j , $j \neq k$ otteniamo sempre zero. Poichè $A_j A_k = 0$ per $k \neq j$, il terzo principio ci dice che la variabile aleatoria associata ad A nello stato v_k è la somma delle variabili aleatorie associate agli A_j nello stato v_k assumendo che il loro prodotto sia nullo e dunque $p_k = 1$ e $p_j = 0$ per $j \neq k$. Ne segue che nello stato v_k la misura di A è deterministica e da sempre il risultato a_k .

Ragionando nello stesso modo, dato uno stato v tale che $\|v\| = 1$ si ha che $\langle v, A_k v \rangle = a_k |\langle v, v_k \rangle|^2$, dunque la variabile aleatoria associata è uguale ad a_k con probabilità $|\langle v, v_k \rangle|^2$ e uguale a zero con probabilità $1 - |\langle v, v_k \rangle|^2$. Ne segue che la variabile aleatoria associata alla misura di A nello stato v ha probabilità $p_j = |\langle v, v_j \rangle|^2$ di avere valore a_j . Si noti che il tutto è consistente poichè

$$\sum_k a_k p_k = \sum_k a_k |\langle v, v_k \rangle|^2 = \sum_k \langle v, A_k v \rangle = \langle v, Av \rangle$$

come deve essere.

Remark 2.1. Per concludere, (4) afferma che se A è un osservabile e una misura nello stato ψ da il risultato $a \in \sigma(A)$, se si ripete la misura si otterrà nuovamente a . Se a ha un autospazio di dimensione d e $\{\psi_i\}_{i=1}^d$ è una sua base ortonormale, allora questo è possibile solo se dopo la misura il sistema sta nello stato $\psi_+ = c \sum_{i=1}^d \langle \psi_i, \psi \rangle \psi_i$ dove c è scelto in modo che $\|\psi_+\| = 1$.

3. INDETERMINAZIONE

Si considerino due operatori autoaggiunti A, B , $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e un insieme denso D con $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ tali che, per ogni $\psi \in D$,

$$(3.1) \quad [A, B]\psi = \alpha\psi$$

Si noti che per ogni, $\varphi, \psi \in D$

$$\begin{aligned} \alpha \langle \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, [A, B]\psi \rangle = \langle \varphi, (AB - BA)\psi \rangle = \langle (B^* A^* - A^* B^*)\varphi, \psi \rangle \\ &= \langle (BA - AB)\varphi, \psi \rangle = -\langle [A, B]\varphi, \psi \rangle = -\bar{\alpha} \langle \varphi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Quindi deve essere $\alpha = -\bar{\alpha}$, ovvero $\alpha = ia$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Remark 3.1. Si noti che (3.1) non può accadere se H è finito dimensionale. Infatti, in tal caso, detta $d = \dim(H)$, si avrebbe

$$iad = \text{Trace}(ia\mathbf{1}) = \text{Trace}([A, B]) = 0$$

ovvero $a = 0$, contrariamente all'ipotesi.

⁶La prima uguaglianza segue dall'ultima affermazione di (2) sulla media di una misura, mentre la seconda uguaglianza è semplicemente la definizione della media di una variabile aleatoria.

Se volgiamo quantificare la dispersione di una misura di un operatore autoaggiunto A in uno stato ψ è naturale introdurre la quantità

$$(3.2) \quad \sigma_A(\psi)^2 = \langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2 = \langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi, A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi \rangle$$

Un fatto importante della meccanica quantistica è il seguente *principio di indeterminazione*.

Theorem 3.2. *Dati due operatori autoaggiunti A, B , e un insieme denso D con $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ tali che, per ogni $\psi \in D$,*

$$[A, B]\psi = i\hbar\psi$$

si ha, per ogni stato $\psi \in D$,

$$\sigma_A(\psi)\sigma_B(\psi) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Proof. Dalla (3.2) e usando la disuguaglianza di Schwartz abbiamo, per ogni $\psi \in D$,

$$\begin{aligned} \sigma_A(\psi)^2 \sigma_B(\psi)^2 &= \|A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi\|^2 \|B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle \psi\|^2 \\ &\geq |\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle \psi \rangle|^2 \\ &\geq [\Im(\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle \psi \rangle)]^2 \\ &= \left[\frac{\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle \psi \rangle - \langle B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle \psi, A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi \rangle}{2i} \right]^2 \\ &= \left[\frac{\langle \psi, [A, B]\psi \rangle}{2i} \right]^2 = \left[\frac{\hbar}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

□

Il lemma precedente implica una ulteriore limitazione per degli operatori A, B che soddisfano le relazioni di commutazione (3.1).

Remark 3.3. *Se A ha un autovettore, allora non esiste un operatore B tale che valgano le relazioni di commutazione (3.1). Infatti, se esistono $\psi \in H$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che $A\psi = a\psi$ allora*

$$\sigma_A(\psi)^2 = \langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2 = 0$$

dunque, per ogni B si ha $\sigma_A(\psi)\sigma_B(\psi) = 0$, contrariamente al Teorema 3.2.

A questo punto ci si domanda se le relazioni (3.1) sono veramente possibili. La risposta è sì: sia $L^2(\mathbb{R})$, $D = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (ovvero le funzioni differenziabili a supporto compatto) $q\psi(x) = x\psi(x)$ con $D(q) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty\}$ e $p = i\hbar \frac{d}{dx}$ con $D(p) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} |\psi'|^2 < \infty\}$. Allora q, p sono auto-aggiunti (lo si verifichi); D è denso in L^2 e sia pq che qp sono ben definiti in D , inoltre, per ogni $\psi \in D$ si ha

$$(3.3) \quad \{[q, p]\psi\}(x) = ix\hbar\psi'(x) - i\hbar(x\psi(x))' = i\hbar\psi(x).$$

Problem 3.4. *Si noti che l'esempio precedente non funziona in $L^2([0, 1])$ con $D(p) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty; \psi(0) = \psi(1)\}$. Infatti, in questo caso q, p sono ancora auto-aggiunti ma, come abbiamo già visto, p ha spettro discreto e quindi autovettori. Cosa non funziona in questo caso nel conto (3.3) ? ⁷*

⁷Suggerimento: si verifichi che se ψ è un autovettore di p allora $q\psi \notin D(p)$.

4. DINAMICA

Ora che abbiamo capito come funziona una misura occupiamoci della dinamica. Per comodità chiamiamo H lo spazio degli stati. Poichè la dinamica è lineare essa può essere rappresentata da un operatore $U(t)$, ovvero se v è lo stato iniziale allora lo stato al tempo t sarà dato da $v(t) = U(t)v$. Ma, per ipotesi, $\|U(t)v\| = \|v\|$. Per polarizzazione segue che $\langle U(t)v, U(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$ per ogni stato v, w , dunque $U(t)^*U(t) = \mathbf{1}$.

Questo implica che $U(t)U(t)^*U(t)U(t)^* = U(t)U(t)^*$ ovvero $U(t)U(t)^*$ è un proiettore. Si noti che il range di $U(t)$ è chiuso.⁸ Inoltre il nucleo è $\{0\}$. Quindi, se $U(t)U(t)^*v = 0$, per qualche $v \neq 0$, allora deve essere che $v \notin \text{Range}(U(t))$ contrariamente all'assunzione che ogni stato è raggiungibile.⁹ Ne segue che anche $U(t)U(t)^* = \mathbf{1}$, e quindi U^* è l'inversa di U . Dunque, se la dinamica è differenziabile, si ha

$$(4.1) \quad \left[\frac{d}{dt} U(t) \right] U(t)^* + U(t) \left[\frac{d}{dt} U(t) \right]^* = 0.$$

Ponendo $\mathcal{H}(t) = i\hbar \left[\frac{d}{dt} U(t) \right] U(t)^*$ (si noti che il fattore $i\hbar$ è una normalizzazione arbitraria che introduciamo per ragioni storiche e di convenienza, non fisiche) (4.1) implica che $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Ovvero

$$i\hbar \frac{d}{dt} v(t) = i\hbar \frac{d}{dt} U(t)v = \mathcal{H}(t)U(t)v = \mathcal{H}(t)v(t)$$

che non è altro che l'equazione di Schrödinger.

Si noti che deve essere $U(0) = \mathbf{1}$, poichè in un tempo nullo nulla cambia. Se la dinamica è invariante per traslazione temporale allora significa che la dinamica $U(t)$ dal tempo zero al tempo t è la stessa che la dinamica dal tempo s al tempo $s+t$, ovvero $U(t+s) = U(t)U(s)$. Da cui, scambiando il ruolo di s e t , segue anche $U(s)U(t) = U(t)U(s)$. Differenziando $U(t+s) = U(t)U(s)$ rispetto a t si ha $\mathcal{H}(t+s)U(t+s) = \mathcal{H}(t)U(t)U(s) = \mathcal{H}(t)U(t+s)$ ovvero $\mathcal{H}$ non dipende dal tempo. Inoltre differenziando $U(s)U(t) = U(t)U(s)$ rispetto a s e ponendo poi $s = 0$ si ha $\mathcal{H}U(t) = U(t)\mathcal{H}$, ovvero $[\mathcal{H}, U(t)] = 0$. Dunque $\mathcal{H}$ è un osservabile che commuta con la dinamica. A che quantità fisica corrisponde? Si noti che

$$\langle v(t), \mathcal{H}v(t) \rangle = \langle v, \mathcal{H}v \rangle$$

ovvero si tratta di una quantità conservata. Ma dalla meccanica classica abbiamo un nome per una quantità conservata in tutti i sistemi indipendenti dal tempo: l'*energia* (o, in alternativa, l'*Hamiltoniana*).

⁸Se $\{w_i\}$ è una successione, nel range di $U(t)$, convergente a w allora esiste una successione $\{v_i\}$ tale che $U(t)v_i = w_i$. Ma allora $\|v_i - v_j\| = \|U(t)(v_i - v_j)\| = \|w_i - w_j\|$ dunque v_i è Cauchy, detto v il limite si ha $U(t)v = w$.

⁹Infatti se esiste $w \in H$ tale che $v = U(t)w$ allora $U(t)U(t)^*v = U(t)U(t)^*U(t)w = U(t)w = v \neq 0$ contrariamente all'ipotesi.

5. ENTANGLEMENT

Si considerino le matrici di Pauli:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1 &= \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problem 5.1. Si verifichi che $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ e che

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{i,j,k} \sigma_k$$

dove $\varepsilon_{i,j,k}$ da il segno della permutazione (simbolo di Levi-Civita).

Se ho una particella con *spin* allora lo spazio degli stati è dato da $\mathbb{R}^2$. Le matrici σ_i sono auto-aggiunte, e quindi osservabili.

Gli autovettori di σ_1 sono $\psi_+^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ con autovalore -1 .

Gli autovettori di σ_2 sono $\psi_+^y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$ con autovalore -1 .

Gli autovettori di σ_3 sono $\psi_+^z = (1, 0)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^z = (0, 1)$ con autovalore -1 .

L'interpretazione fisica è che sono gli operatori associati alla misura dello spin nelle direzioni x, y e z , rispettivamente.

Problem 5.2. Si noti che la probabilità di avere ± 1 per σ_x o σ_y negli stati $\psi_{\pm}^z$ è uguale a $\frac{1}{2}$.

Problem 5.3. Si noti che $\sigma_x \psi_+^z = \psi_-^z$ e $\sigma_x \psi_-^z = \psi_+^z$, inoltre $\sigma_y \psi_+^z = i\psi_-^z$ e $\sigma_y \psi_-^z = -i\psi_+^z$.

Problem 5.4. Si mostri che gli autovalori di $\sigma(n) = \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_i$, $n \in \mathbb{R}^3$, sono $\pm \|n\|$. Si mostri che per ogni stato ψ esiste un vettore $n \in \mathbb{R}^3$, $\|n\| = 1$, tale che la misura associata l'osservabile $\sigma(n)$ da come risultato sempre $+1$.

Immaginiamo ora di avere due particelle, allora spazio degli stari sarà $\mathbb{R}^4$. Usiamo un $'$ per indicare gli operatori e gli stati associati alla seconda particella. La misura dello spin della prima particella corrisponde all'operatore $\bar{\sigma}_i = \sigma_i \otimes \mathbf{1}$ mentre quella sulla seconda particella a $\bar{\sigma}'_i = \mathbf{1} \otimes \sigma'_i$.

Si consideri lo stato $\psi_* = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+^z \otimes \psi_-^{z'} + \psi_-^z \otimes \psi_+^{z'}]$.

Problem 5.5. Si mostri che $\langle \psi_*, \bar{\sigma}_i \psi_* \rangle = 0$, $\langle \psi_*, \bar{\sigma}'_i \psi_* \rangle = 0$.

Si noti che questo è sostanzialmente differente dalla situazione nel Problema 5.4: in qualunque direzione si cerchi di misurare lo spin si ottiene sempre zero in media. Questo stato, che ha proprietà che non hanno alcuna corrispondenza in meccanica classica, si chiama *entangled*.

Una proprietà sorprendente di questo stato è che se si misura σ_z della prima particella e si ottiene $+1$ allora Remark 2.1 implica che dopo la misura lo stato del systems deve essere proporzionale a

$$\langle \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'}, \psi_* \rangle \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'} + \langle \psi_+^z \otimes \psi_+^{z'}, \psi_* \rangle \psi_+^z \otimes \psi_+^{z'} = \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'}.$$

Questo implica che se si misura σ'_z si otterrà sempre -1 . Quindi il risultato della prima misura determina la seconda anche se i due sistemi sono separati da una distanza enorme.

Remark 5.6. *Si noti che la discussione precedente implica una qualche non-località della Meccanica Quantistica. Questo sembra contraddire la teoria delle relatività secondo cui la luce è la velocità massima. Tuttavia una più attenta analisi mostra che non vi è alcuna contraddizione, semplicemente il mondo è strano.*

6. IL PROBLEMA DELLA MISURA

Il problema della misura è una difficoltà che ha afflitto la Meccanica Quantistica sin dal suo inizio ed ha prodotto infinite discussioni che tutt'ora persistono con una considerevole intensità e passione. La difficoltà nasce dal fatto se si ritiene che la meccanica quantistica si possa applicare a tutto, allora da un lato si può applicare anche all'apparato di misura e dall'altro la misura deve essere compatibile con le leggi di evoluzione. Una discussione completa di questo dilemma richiederebbe molto tempo, qui mi limito a mostrare come si può impostare il problema.

Se H è lo spazio degli stati del sistema e H_M è lo spazio degli stati dell'apparato di misura allora, secondo (6) lo spazio totale è dato da $H_* = H_M \otimes H$. Abbiamo poi che esiste una evoluzione $U(t)$ su H_* che descrive la misura che dura un tempo t_0 . Se l'apparato sta nello stato iniziale Ψ e il sistema nello stato iniziale ψ , allora il sistema sta nello stato iniziale $\Psi \otimes \psi$ e alla fine della misura sarà nello stato $U(t_0)\Psi \otimes \psi$. Se la misura corrisponde all'osservabile compatto A allora esiste una base di autostati ψ_k e autovalori a_k . D'altro canto l'apparato di misura avrà degli stati che corrispondono all'affermazione “la misura ha avuto come risultato a_k ”. In altre parole esiste un osservabile B che agisce su H_M tale che i suoi autovalori sono a_k , supponiamo che gli autovettori corrispondenti siano Ψ_k e formino una base. Allora possiamo scrivere

$$U(t_0)\Psi \otimes \psi = \sum_{k,j} \alpha_{k,j} \Psi_k \otimes \psi_j.$$

Se guardiamo l'apparato la probabilità di vedere il risultato a_l è data da

$$\sum_j |\langle \Psi_l \otimes \psi_j, U(t_0)\Psi \otimes \psi \rangle|^2 = \sum_j |\alpha_{l,j}|^2$$

Ma le regole sulle misure se applicate al sistema originario, ignorando la descrizione dell'apparato, danno che la probabilità di avere a_l è data da

$$|\langle \psi_l, \psi \rangle|^2 = \sum_j |\alpha_{j,l}|^2.$$

D'altro canto se l'apparato di misura è efficace, volgiamo che la probabilità che l'apparato legga a_l quando il sistema sta nello stato ψ_k con $l \neq k$ sia zero. Ovvero deve essere

$$0 = \sum_j |\langle \Psi_l \otimes \psi_j, U(t_0)\Psi \otimes \psi_k \rangle|^2 = \sum_j |\alpha_{l,j}|^2$$

Quindi,

$$U(t_0)\Psi \otimes \psi = \sum_l U(t_0)\Psi \otimes \psi_l \langle \psi_l, \psi \rangle = \sum_l \alpha_{l,t} \Psi_l \otimes \psi_l \langle \psi_l, \psi \rangle = \sum_l |\langle \psi_l, \psi \rangle|^2 \Psi_l \otimes \psi_l.$$

In altre parole abbiamo un entagled state. Tuttavia si noti che abbiamo fatto riferimento all'atto di "leggere l'apparato di misura" e questo atto è stato a sua volta interpretato come una misura. Quindi se il nostro scopo era di spiegare cosa è una misura abbiamo fallito in quanto abbiamo fatto semplicemente riferimento ad un'altra misura (quella di guardare l'apparato) che quindi rimane non spiegata.

Inoltre, il che è assai peggio, il Remrk 2.1 implica che se il primo risultato era a_l deve essere che il sistema è nello stato ψ_l , ma questo non è possibile visto che dopo la misura abbiamo appena visto che si trova in una sovrapposizione di stati. D'altro canto

$$U(t_0)^2 \Psi \otimes \psi = \sum_l |\langle \psi_l, \psi \rangle|^2 U(t_0) \Psi_l \otimes \psi_l = \sum_l |\langle \psi_l, \psi \rangle|^2 \Psi_l \otimes \psi_l = U(t_0) \Psi \otimes \psi.$$

Quindi, almeno, la seconda misura lascia inalterato lo stato. Inoltre se guardiamo l'apparato e lo vediamo registrare il valore a_l e questo significa che il sistema composto dall'apparato di misura e dal sistema sta, dopo che abbiamo guardato l'apparato, nello stato $\Psi_l \otimes \psi_l$ e quindi il sistema sta appunto nello stato ψ_l . Come questi fatti vadano interpretati rimane, a tutt'oggi, controverso.

CARLANGELO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

Email address: `liverani@mat.uniroma2.it`