SOMME

CARLANGELO LIVERANI

1. Il problema

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vogliamo stimare

$$\sum_{n=0}^{m} f(n)$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. Poichè per m piccoli si può semplicemente usare un calcolatore, il problema è non banale solo per m abbastanza grandi.

L'idea di base che vogliamo usare è la seguente: supponiamo che F sia una primitiva di f, allora

$$F(m+1) - F(0) = \sum_{n=0}^{m} F(n+1) - F(n) = \sum_{n=0}^{m} f(n) + \frac{1}{2} f'(\xi_n)$$

dove, nella seconda eguaglianza, abbiamo usato la Formula di Taylor al secondo ordine col resto di Lagrange e quindi $\xi_n \in [n, n+1]$. Si noti tuttavia che questa è solo l'idea di base: in alternativa si potrebbe usare la formula di Taylor ad ordini superiori oppure il resto in forma integrale o magari, in qualche caso, si può calcolare algebricamente $F(n+1) - F(n)$ in maniera esatta. Ad ogni modo, già nella semplice versione di cui sopra si ottiene la formula

$$\sum_{n=0}^{m} f(n) = F(m+1) - F(0) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m} f'(\xi_n) \tag{1.1}$$

che ha un aspetto piuttosto promettente. Tuttavia per vedere quanto efficiente è questo approccio occorre studiare dei casi concreti.

2. Somma di potenze

Vediamo il caso $f(n) = n^p$, con $p \in \mathbb{Z}$. Se $p = 0$, (1.1) da immediatamente

$$\sum_{n=0}^{m} 1 = m + 1$$

cosa che avremmo potuto calcolare facilmente in maniera diretta.

Se $p = 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{m} n = \frac{1}{2}(m+1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m} 1 = \frac{(m+1)^2 - (m+1)}{2} = \frac{(m+1)m}{2}.$$

Date: April 29, 2025.

Se $p = 2$ allora, usando la Formula di Taylor al terzo ordine,

$$\sum_{n=0}^{m} n^2 = \frac{1}{3}(m+1)^3 - \sum_{n=0}^{m} n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{m} 1 = \frac{1}{3}(m+1)^3 - \frac{(m+1)m}{2} - \frac{1}{3}(m+1)$$
$$= \frac{m(2m+1)(m+1)}{6}.$$

Ovviamente, in questa semplice situazione non c'è alcun bisogno di usare la formula di Taylor, basta il binomio di Netwon. Lo si usi per studiare il caso $p = 3$.

3. Potenze negative

Consideriamo ora il caso $p = -1$ e usiamo Taylor al secondo ordine

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \ln(m+1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\xi_n^2},$$

dove $\xi_n \in [n, n+1]$. Dunque

$$b_n := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\xi_n^2} \le \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = 2 - \frac{1}{m}. \tag{3.1}$$

Vale a dire che b_m è una successione monotona crescente limitata, dunque ha limite. Poniamo quindi

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\xi_n^2} = 2\gamma.$$

Ne segue,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \ln(m+1) + \gamma - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{\xi_n^2}.$$

Si noti che, ragionando come in (3.1),

$$\sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{\xi_n^2} \le \sum_{n=m+1}^{k} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{m} - \frac{1}{k}.$$

dunque

$$\ln(m+1) + \gamma \ge \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \ge \ln(m+1) + \gamma - \frac{1}{2m}. \tag{3.2}$$

Rimane da capire cosa è γ, che è chiamata la *costante di Eulero*. Non si sa molto su γ (per esempio non si sa se è un numero razionale oppure irrazionale), ma è possibile calcolarla con precisione arbitraria con la formula di cui sopra. Per esempio, ponendo $m = 5$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} - \ln 6 \le \gamma \le \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} - \ln 6 + \frac{1}{10}$$

che implica $0.49 \le \gamma \le 0.59$. Sebbene non abbiamo trovato una formula esatta, quanto detto permette di calcolare la somma per ogni m con un errore inferiore ad due decimi (e calcolando meglio γ e usando la formula di Taylor ad ordini superiori si può aumentare la precisione a volontà).

Come esercizio si provi a studiare il caso $p = -2$.

4. Formula di Stirling

Questa volta consideriamo il caso $f(x) = \ln x$. In tal caso la primitiva è $F(x) = x \ln x - x$. Dunque

$$\sum_{n=1}^{m} \ln n = (m+1)\ln(m+1) - (m+1) + 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} + \frac{1}{3!}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\eta_n^2}$$

dove abbiamo usato Taylor al terzo ordine e $\eta_n \in [n, n+1]$. Da cui

$$\sum_{n=1}^{m} \ln n = (m+\frac{1}{2})\ln(m+1) - m - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln(m+1)\right] + \frac{1}{3!}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\eta_n^2}.$$

Da quanto detto in precedenza sappiamo che esiste il limite

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{3!}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\eta_n^2} - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln(m+1)\right] = C.$$

Argomentando come nella sezione precedente si ottone quindi

$$\sum_{n=1}^{m} \ln n = (m+\frac{1}{2})\ln(m+1) - m + C + \mathcal{O}(\frac{1}{m}).$$

L'interesse di questa formula deriva dalla possibilità di usarla per stimare il fattoriale:

$$\begin{aligned} m! &= e^{\sum_{n=1}^{m}\ln n} = e^{(m+\frac{1}{2})\ln(m+1) - m + C + \mathcal{O}(\frac{1}{m})} = (m+1)^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} e^{C} e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})} \\ &= m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m}(1+\frac{1}{m})^{m+\frac{1}{2}} e^{C} e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})}. \end{aligned}$$

Ora si noti che

$$\ln(1+\frac{1}{m}) = \frac{1}{m} + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$$

dunque

$$(1+\frac{1}{m})^{m+\frac{1}{2}} = e^{1+\mathcal{O}(\frac{1}{m})}.$$

Abbiamo finalmente la *formula di Stirling*

$$m! = \sqrt{C_0 m}\, m^m e^{-m} e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})},$$

dove C_0 è una costante che non abbiamo calcolato ma che si può dimostrare essere, sorprendentemente, uguale a 2π.

Nelle discussioni di cui sopra abbiamo usato la notazione $\mathcal{O}(m^p)$. Come dovreste sapere essa designa una funzione incognita avente la seguente proprietà: esiste una costante $C_1 > 0$ tale che $|\mathcal{O}(m^p)| \leq C_1 m^p$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Ovviamente la formula di Stirling non è molto untile per un dato m a meno che non si abbia una stima concreta di C_0 e C_1. Come utile esercizio vi invito a cercare di ottenere tale stima.

5. Somma geometrica

Come ultimo esempio consideriamo $f(x) = a^x$ per un qualche $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ (il caso $a = 1$ è già stato trattato). La primitiva è data da $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$, allora

$$\frac{a^{m+1}-1}{\ln a} = \sum_{n=0}^{m}\frac{a^{n+1}}{\ln a} - \frac{a^n}{\ln a} = \sum_{n=0}^{m}\frac{a^n(a-1)}{\ln a} = \frac{a-1}{\ln a}\sum_{n=0}^{m} a^n.$$

Da cui segue la ben nota formula

$$\sum_{n=0}^{m} a^n = \frac{1-a^{m+1}}{1-a}.$$

References

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

Email address: liverani@mat.uniroma2.it