Analisi II

Secondo esonero, 28-05-25

Cognome..... Nome.....

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata o incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri la curva $\gamma(t) = (3t + 2 \sin(2\pi t), 4t + 8 \sin(4\pi t))$, con $t \in [0, 1]$. Si mostri che la lunghezza di tale curva è maggiore di 5.

2. Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2$. Si consideri il metodo del gradiente di passo ε ovvero

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \nabla f(\xi_n)\varepsilon,$$

dove $\xi_n = (x_n, y_n)$ e $\xi_0 = (1, \frac{1}{2})$. Si studi la successione $\{\xi_n\}$ per $\varepsilon = 1$ e per $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

3. Si calcoli il volume della ellisse

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), A(x, y, z) \rangle + \langle b, (x, y, z) \rangle + \frac{3}{4} \leq 0\}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = (1, 0, 0).$$

Soluzione

1. Si noti che

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \geq \left\| \int_0^1 \gamma'(t) dt \right\| = \|\gamma(1) - \gamma(0)\| = \|(3, 4)\| = 5.$$

Qui il punto centrale è l'uso della disuguaglianza triangolare che rende precise un mucchio di chiacchiere vaghe che alcuni di voi hanno fatto.

2. Si ha $\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3 - 4y)$. Dunque, ponendo $\xi_n = (x_n, y_n)$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - 2x_n\varepsilon = (1 - 2\varepsilon)x_n \\ y_{n+1} &= y_n - 4y_n^3\varepsilon + 4y_n\varepsilon = y_n [(1 + 4\varepsilon) - 4y_n^2\varepsilon]. \end{aligned}$$

Se $\varepsilon = 1$ allora $x_{n+1} = -x_n$ e quindi $x_n = (-1)^n$. Mentre $y_{n+1} = y_n [5 - 4y_n^2]$. Si noti che se $|y_n| \geq 2$ allora $|y_{n+1}| \geq |y_n|(16 - 5) \geq 11|y_n|$, ovvero $y_n \rightarrow \infty$. Siccome $y_1 = \frac{1}{2}[5 - 1] = 2$, ne segue che $y_n \rightarrow \infty$.

Se $\varepsilon = \frac{1}{8}$ allora $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n$, dunque $x_n \rightarrow 0$. Mentre, $y_{n+1} = y_n[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y_n^2] =: g(y_n)$. Dunque se $y_n \in [0, 1]$ abbiamo $y_{n+1} \geq y_n$. D'altro canto $g'(y) = \frac{3}{2} - y^2$ che per $y \in [0, 1]$ è positiva, quindi g è crescente. Questo significa che per $0 \leq y_n \leq 1$ abbiamo $y_{n+1} = g(y_n) \leq g(1) = 1$ e $y_{n+1} = g(y_n) \geq g(0) = 0$. Quindi y_n è una successione monotona crescente e limitata. Ha perciò un limite, chiamiamolo z . Prendiamo il limite nella relazione ricorsiva si ha $z = g(z)$ che ha $z = 1$ come unica soluzione in $[0, 1]$. Ne segue che in questo caso l'algoritmo converge a uno dei minimi della funzione f . (Si noti che c'è un poco di lavoro per capire l'andamento asintotico della successione, dire semplicemente converge o diverge perchè si sono calcolati i primi passi non è accettabile).

3. Consideriamo il cambio di variabili

$$(x, y, z) = F \left(\bar{x} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}, \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z} \right).$$

Allora

$$\langle (x, y, z), A(x, y, z) \rangle + \langle b, (x, y, z) \rangle + \frac{3}{4} = \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{x} + \frac{3}{4} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + 1.$$

In altre parole $\bar{E} = F^{-1}(E) = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3 : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq -1\}$ ovvero l'insieme vuoto, che ovviamente ha volume nullo.

In realtà si è trattato di un errore di battitura, la mia intenzione era di scrivere

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), A(x, y, z) \rangle + \langle b, (x, y, z) \rangle - \frac{3}{4} \leq 0\}$$

Da questo si otteneva

$$\langle (x, y, z), A(x, y, z) \rangle + \langle b, (x, y, z) \rangle - \frac{3}{4} = \left(\bar{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{x} - \frac{3}{4} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \frac{1}{2}.$$

Quindi $\bar{E} = F^{-1}(E) = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3 : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq \frac{1}{2}\}$ ovvero abbiamo la sfera di raggio $1/\sqrt{2}$, per cui

$$\int_E dx dy dz = \int_{\bar{E}} \det [DF(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})] d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = \frac{1}{2} \int_{\bar{E}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$