Analisi 2

Primo esonero, 17-04-24

Cognome........................ Nome........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Dato $x \in \mathbb{R}^d$, sia $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$ e $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$,
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant d\|x\|_\infty.$$

2. Data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
si dica se f è continua e se è differenziabile.

3. Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la funzione definita da
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{\|x\|} & \forall x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Data la successione determinata da $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ e $x_{n+1} = g(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si studi
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Soluzione

1. Poichè, per ogni indice i, $|x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{d} |x_k|$, prendendo il massimo su i si ha la prima disuguaglianza. D'altro canto, per ogni indice k, $|x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ e sommando su k si ha la seconda disuguaglianza.

2. Poichè
$$\lim_{(x,y)\to 0} x^2y^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$
la funzione è continua. Se calcoliamo le derivate parziali, in zero otteniamo
$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{h\to 0} f(h,0)h^{-1} = 0 \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{h\to 0} f(0,h)h^{-1} = 0. \end{aligned}$$
Mentre per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha
$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 2xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \\ \partial_y f(x,y) &= 2x^2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$
Usando le coordiante polari si ha
$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to 0} 2xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} = \\ &= \lim_{\rho\to 0} 2\rho^3 \cos\theta \sin\theta \sin\rho^{-2} - 2\rho\cos^3\theta \sin^2\theta \cos\rho^{-2} = 0 \\ &\lim_{(x,y)\to 0} 2x^2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$
Ne segue che le derivate parziali sono continue e quindi la funzione è differenziabile. In alternativa si poteva verificare direttamente che la funzione è differenziabili in zero con derivata nulla poichè
$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{h_1^2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

3. Si noti che $\|x_{n+1}\| = \|g(x_n)\| \leqslant 2^{-1}\|x_n\|$ dunque
$$\|x_n\| \leqslant 2^{-1}\|x_{n-1}\| \leqslant 2^{-n}\|x_0\| = 2^{-n}$$
Da cui segue
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$