Calcolo II

Esame del 21/01/2025

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 8 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Data una qualunque funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si mostri che la lunghezza della curva $(x, f(x))$, $x \in [0, 1]$, è sempre maggiore di uno.
2. Si trovino i punti di accumualzione dell'insieme $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \ : \ n, m \in \mathbb{N}\}$.
3. Dato $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2\}$ e $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z + x + y - 1 = 0\}$ si trovi il massimo della funzione $f(x, y, z) = z$ sull'insieme $P \bigcap L$.
4. Si mostri che $d(x, y) = \left|\ln \frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right|$ è una distanza per i punti nell'intervallo $(0, 1)$. Si dica se la successione $\{1/n\}$ è di Cauchy rispetto alla distanza d.

Soluzione

1. La lunghezza è
$$\int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \geqslant \int_0^1 dx = 1.$$

2. I punti di accumulazioni sono $\{(0, \frac{1}{m}) \ : \ m \in \mathbb{N}\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$.

3. L'insieme $P \bigcap L$ è definito da
$$z = x^2 + y^2$$
$$z = 1 - x - y$$
Dunque deve essere $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$ e vogliamo massimizzare la funzione $z = x^2 + y^2 = g(x,y)$. Usando i moltiplicatori di Lagrange dobbiamo trovare i punti stazionari della funzione $F(x,y,\lambda) = g(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$, ovvero
$$2x + 2\lambda x + \lambda = 0$$
$$2y + 2\lambda y + \lambda = 0$$
$$x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0.$$
Si noti che $\lambda = -1$ non può essere una soluzione. Dunque $x = y = -\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}$. Da cui si ha $2x^2 + 2x - 1 = 0$, ovvero $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Siccome $g(x_\pm, x_p m) = 1 - 2x_\pm$, ne segue che il massimo si ha per $(x,y) = (x_-, x_-)$, ovvero il massimo di f è $2+\sqrt{3}$.
Un modo alternativo di risolvere il problema è di usare direttamente i moltiplicatori di Lagrange e studiare i punti stazionari della funzione
$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(z - 1 + x + y)$$
che da il sistema
$$-2\lambda x + \mu = 0$$
$$-2\lambda y + \mu = 0$$
$$z - x^2 - y^2 = 0$$
$$z - 1 + x + y = 0$$
che produce lo stesso risultato.

4. Controlliamo che d è una metrica:
$$d(x,x) = |\ln 1| = 0$$
$$x(x,y) = \left|\ln\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right| = \left|\ln\frac{(1-y)x}{(1-x)y}\right| = d(y,x)$$
$$d(x,y) = \left|\ln\frac{(1-x)z(1-z)y}{(1-y)z(1-z)x}\right| = \left|\ln\frac{(1-x)z}{(1-z)x} + \ln\frac{(1-z)y}{(1-y)z}\right| \leqslant \left|\ln\frac{(1-x)z}{(1-z)x}\right| + \left|\ln\frac{(1-z)y}{(1-y)z}\right|$$
$$= d(x,z) + d(z,y).$$
Dato $1/n$ e $1/m$, $n \geqslant m > 1$ si ha
$$d(1/n, 1/m) = \ln\frac{n-1}{m-1}$$
da cui è ovvio che **non** si tratta di una successione di Cauchy, poichè per m fissato la distanza diventa arbitrariamente grande per n che va all'infinito.