Calcolo II

Esame del 19/01/2026

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 8 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcoli la lunghezza della curva $\{\gamma(t) = (t, \frac{t^2}{2}) \ : \ t \in [0, \ln(1+\sqrt{2})]\}$.
2. Si mostri che $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.
3. Si trovi il valore di $\lambda \geqslant 0$ per cui il minimo della funzione $f_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da
$$f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\lambda^2 - \lambda^4,$$
ha il valore massimo.
4. Si consideri il dominio $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant (1 - z^2)^2 \ , -\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\}$ (una specie di botte) e se ne calcoli il volume.

Soluzione

1. Si ha
$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{\|\gamma'(t)\|}dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+t^2}dt$$
Si faccia il cambio di variabile $t = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Si noti che $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, inoltre $1 + (\sinh x)^2 = (\cosh x)^2$. Inoltre, $\sinh[\ln(1+\sqrt{2})] = 1$, $\sinh 0 = 0$. Quindi
$$\begin{aligned}\text{lunghezza}(\gamma) &= \int_0^1 (\cosh x)^2 dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} dx \\ &= \frac{e^{2x}/2 + 2x - e^{-2x}/2}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{e^{-2}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sinh 2}{4}.\end{aligned}$$

2. Si noti che
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \int_1^m x^{-2}dx = 2 - \frac{1}{m} \leqslant 2,$$
poichè l'area sotto la curva è maggiore dell'area dei rettangoli di base $[n-1, n]$ e altezza n^{-2} per $n \in \{2, \ldots, m\}$. In alternativa
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2.$$

3. I punti stazionari sono dati da
$$\partial_{x_i} f'_\lambda(x) = 2x_i - 2\lambda = 0$$
ovvero $x_i = \lambda$. Poiché la funzione cresce all'infinito, si tratta di un minimo. Calcoliamo la funzione nel minimo
$$f_\lambda(\lambda(1, \ldots, 1)) = \lambda^2 n - \lambda^4 =: m(\lambda).$$
I punti stazionari della funzione m sono 0 e $\sqrt{n/2}$. A zero la funzione ha un minimo locale, quindi il massimo si ha per $\lambda = \sqrt{n/2}$.

4. È conveniente usare le coordinate $(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$. In queste coordinate
$$B = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant r \leqslant 1 - z^2 \ , -\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2} \ , \theta \in [0, 2\pi)\right\}$$
Dunque, cambiando variabili,
$$\begin{aligned}\text{Volume}(B) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz \int_0^{1-z^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz \int_0^{1-z^2} r dr \\ &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-z^2)^2 dz = \pi\left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5 \cdot 16}\right] = \pi \frac{203}{240}.\end{aligned}$$