Calcolo II

Esame del 23/07/2025

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 8 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$, si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma bilineare, su $\mathbb{R}^2$,
$$\langle x, y \rangle_a := \langle x, Ay \rangle$$
definisce un prodotto scalare.

2. Sia $\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{C}^0([0,2], \mathbb{R}) \ : \ f(x) \in [0,1] \ \forall x \in [0,2] \}$. Si consideri la distanza in $\mathcal{C}^0([0,2], \mathbb{R})$ definita da
$$d(f,g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx.$$
Si dica se $\mathcal{A}$ è un insieme chiuso rispetto a tale distanza.

3. Dato $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}$. Si calcoli il volume d P.

4. Data la curva $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, (\sin 2\pi t)^2, (t - \frac{1}{2})^2)$, $t \in [0,1]$, e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = [x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} (x,y,z)$, si calcoli
$$\int_\gamma f = \int_0^1 \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Soluzione

1. La forma bilineare è simemtrica poichè A è simemtrica, quindi l'unica cosa che occorrre verificare è che sia positiva, ovvero che gli autovalori sono strattamente maggiori di zero. Gli autovalori sono $\lambda_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4(4-a^2)}}{2}$ che sono entrambi positivi solo se $|a| < 2$.

2. Un insieme è chiuso solo se tutte le succesioni convergenti di elementi dell'insieme hanno un limite che appartiene all'insieme. Si consideri la successione $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1] \\ n(x-1) & \forall x \in (1, 1+\frac{1}{n}) \\ 1 & \forall \in [1+\frac{1}{n}, 2]. \end{cases}$$

   Si consideri inoltre la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1] \\ 1 & \forall \in (1,2]. \end{cases}$$

   Allora

$$\int_0^2 |f_n(x) - g(x)| \, dx = \int_1^{1+\frac{1}{n}} |n(x-1) - 1| \leqslant \frac{1}{n}.$$

   In altre parole, f_n converge a $g \notin \mathcal{C}^0$. Dunque f_n converge ad un elemento che non appartiene ad $\mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A}$ non è un insieme chiuso.

3. P è un paraboloide, il suo volume è dato da

$$\int_{x^2+y^2 \leqslant 1} dxdy \int_0^{1-x^2+y^2} dz = \int_{x^2+y^2 \leqslant 1} (1 - x^2 + y^2) dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (1-r^2) r$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Si noti che $f = \nabla V$ dove $V(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Quindi

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} V \circ \gamma(t) dt = V(\gamma(1)) - V(\gamma(0)) = 0$$

   poichè γ è una curva chiusa.