Calcolo II

Esame del 09/07/2024

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcoli
$$\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n}$$
con una precisione migliore di 1.

2. Si dica quanti zeri ha il polinomio
$$p(x) = x^{12} - 8x^6 + 5.$$

3. Si calcoli l'area superficiale di un cono retto di altezza h e base con raggio r.

4. Si trovi il valore minimo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x_1 + 33$, sulla superficie della sfera di centro zero e raggio due.

5. Si verifichi che $y_p(x) = -\frac{x}{2}\cos x$ è una soluzione dell'equazione
$$y'' + y = \sin x.$$
Si trovi un'altra soluzione tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Soluzione

1. Si noti che
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx.$$
Ne segue che, per ogni $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \ln(N+1) = \ln N + \ln\left(1 + N^{-1}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(N).$$
Quindi $\frac{1}{2} + 9 \ln 10 = 21,2 \pm 0,1$ differisce da $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n}$ per meno di uno.

2. Si noti che $p'(x) = 12x^{11} - 48x^5 = 12x^5(x^6 - 4)$, quindi p ha punti stazionari in $x = 0$ e $x = \pm 2^{\frac{1}{3}}$. Dunque è decrescente in $(-\infty, -2^{\frac{1}{3}})$, crescente in $(-2^{\frac{1}{3}}, 0)$, decrescente in $(0, 2^{\frac{1}{3}})$ e crescente in $(2^{\frac{1}{3}}, \infty)$. D'altro canto $p(\pm 2^{\frac{1}{3}}) = 2^4 - 2^3 2^2 + 5 = -11$, mentre $p(0) = 5$. Ne segue che p ha 4 zeri.

   L'aromento di cui sopra è abbastanza generale, e quindi si può applicare a molti casi simili. Tuttavia, l'esercizio era così stupido che si poteva risolvere esplicitamente ponento $z = x^6$ e ottenendo quindi l'equazione $z^2 - 8z + 5 = 0$.

3. Ovviamente l'area della base è πr^2. La superficie laterale si può parametrizzare con $f : [0, r] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$f(\rho, \theta) = \left(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, h - \frac{\rho}{r} h\right).$$
Ne segue che la superficie laterale del cono S è data da
$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \|\partial_\rho f \wedge \partial_\theta f\| = \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho \sqrt{\frac{h^2}{r^2} + 1} \\ &= \pi \left(r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2}\right). \end{aligned}$$

4. Cominciamo col trovare i punti stazionari. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è sufficiente trovare i punti stazionari della funzione $g(x, \lambda) = x_1 + 33 + \lambda(\|x\|^2 - 4)$. Questi soddifano l'equazione
$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x_1 &= 0 \\ 2\lambda x_2 &= 0 \\ 2\lambda x_3 &= 0 \\ \|x\|^2 &= 4. \end{aligned}$$
Ne segue che i punti stazionari sono $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = \pm 2$. Dunque il minimo è 31.
Per la verità l'esercizio è così stupido che si può risolvere anche senza moltiplicatori di Lagrange, semplicemente notando che il valore minimo di x_1 sulla sfera è -2. Se lo avete notato, meglio per voi.

5. Si verifica facilmente che $y_p(x) = -\frac{x}{2} \cos x$ è una soluzione particolare dell'equazione. Se ne evince che la soluzione generale è
$$y(x) = a \cos x + b \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$
Da cui si può facilmente calcolare a, b per ottenere la soluzione cercata.