

SOMME

CARLANGELLO LIVERANI

1. IL PROBLEMA

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vogliamo stimare

$$\sum_{n=0}^m f(n)$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. Poichè per m piccoli si può semplicemente usare un calcolatore, il problema è non banale solo per m abbastanza grandi.

L'idea di base che vogliamo usare è la seguente: supponiamo che F sia una primitiva di f , allora

$$F(m+1) - F(0) = \sum_{n=0}^m F(n+1) - F(n) = \sum_{n=0}^m f(n) + \frac{1}{2}f'(\xi_n)$$

dove, nella seconda eguaglianza, abbiamo usato la Formula di Taylor al secondo ordine col resto di Lagrange e quindi $\xi_n \in [n, n+1]$. Si noti tuttavia che questa è solo l'idea di base: in alternativa si potrebbe usare la formula di Taylor ad ordini superiori oppure il resto in forma integrale o magari, in qualche caso, si può calcolare algebricamente $F(n+1) - F(n)$ in maniera esatta. Ad ogni modo, già nella semplice versione di cui sopra si ottiene la formula

eq:basic

 (1.1)
$$\sum_{n=0}^m f(n) = F(m+1) - F(0) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m f'(\xi_n)$$

che ha un aspetto piuttosto promettente. Tuttavia per vedere quanto efficiente è questo approccio occorre studiare dei casi concreti.

2. SOMMA DI POTENZE

Vediamo il caso $f(n) = n^p$, con $p \in \mathbb{Z}$. Se $p = 0$, [\(I.1\)](#) da immediatamente

$$\sum_{n=0}^m 1 = m+1$$

cosa che avremmo potuto calcolare facilmente in maniera diretta.

Se $p = 1$ allora

$$\sum_{n=0}^m n = \frac{1}{2}(m+1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m 1 = \frac{(m+1)^2 - (m+1)}{2} = \frac{(m+1)m}{2}.$$

Se $p = 2$ allora, usando la Formula di Taylor al terzo ordine,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m n^2 &= \frac{1}{3}(m+1)^3 - \sum_{n=0}^m n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^m 1 = \frac{1}{3}(m+1)^3 - \frac{(m+1)m}{2} - \frac{1}{3}(m+1) \\ &= \frac{m(2m+1)(m+1)}{6}. \end{aligned}$$

Ovviamente, in questa semplice situazione non c'è alcun bisogno di usare la formula di Taylor, basta il binomio di Newton. Lo si usi per studiare il caso $p = 3$.

3. POTENZE NEGATIVE

Consideriamo ora il caso $p = -1$ e usiamo Taylor al secondo ordine

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = \ln(m+1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\xi_n^2},$$

dove $\xi_n \in [n, n+1]$. Dunque

$$\boxed{\text{eq:stima1}} \quad (3.1) \quad b_m := \sum_{n=1}^m \frac{1}{\xi_n^2} \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^m \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^m \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = 2 - \frac{1}{m}.$$

Vale a dire che b_m è una successione monotona crescente limitata, dunque ha limite. Poniamo quindi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\xi_n^2} = 2\gamma.$$

Ne segue,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = \ln(m+1) + \gamma - \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m+1}^k \frac{1}{\xi_n^2}.$$

Si noti che, ragionando come in [\(3.1\)](#), [eq:stima1](#)

$$\sum_{n=m+1}^k \frac{1}{\xi_n^2} \leq \sum_{n=m+1}^k \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{m} - \frac{1}{k}.$$

dunque

$$\boxed{\text{eq:stima2}} \quad (3.2) \quad \ln(m+1) + \gamma \geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \geq \ln(m+1) + \gamma - \frac{1}{2m}.$$

Rimane da capire cosa è γ , che è chiamata la *costante di Eulero*. Non si sa molto su γ (per esempio non si sa se è un numero razionale oppure irrazionale), ma è possibile calcolarla con precisione arbitraria con la formula di cui sopra. Per esempio, ponendo $m = 5$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} - \ln 6 \leq \gamma \leq \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} - \ln 6 + \frac{1}{10}$$

che implica $0.49 \leq \gamma \leq 0.59$. Sebbene non abbiamo trovato una formula esatta, quanto detto permette di calcolare la somma per ogni m con un errore inferiore ad due decimi (e calcolando meglio γ e usando la formula di Taylor ad ordini superiori si può aumentare la precisione a volontà).

Come esercizio si provi a studiare il caso $p = -2$.

4. FORMULA DI STIRLING

Questa volta consideriamo il caso $f(x) = \ln x$. In tal caso la primitiva è $F(x) = x \ln x - x$. Dunque

$$\sum_{n=1}^m \ln n = (m+1) \ln(m+1) - (m+1) + 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} + \frac{1}{3!} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\eta_n^2}$$

dove abbiamo usato Taylor al terzo ordine e $\eta_n \in [n, n+1]$. Da cui

$$\sum_{n=1}^m \ln n = (m + \frac{1}{2}) \ln(m+1) - m - \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln(m+1) \right] + \frac{1}{3!} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\eta_n^2}.$$

Da quanto detto in precedenza sappiamo che esiste il limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3!} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\eta_n^2} - \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln(m+1) \right] = C.$$

Argomentando come nella sezione precedente si ottiene quindi

$$\sum_{n=1}^m \ln n = (m + \frac{1}{2}) \ln(m+1) - m + C + \mathcal{O}(\frac{1}{m}).$$

L'interesse di questa formula deriva dalla possibilità di usarla per stimare il fattoriale:

$$\begin{aligned} m! &= e^{\sum_{n=1}^m \ln n} = e^{(m+\frac{1}{2}) \ln(m+1) - m + C + \mathcal{O}(\frac{1}{m})} = (m+1)^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} e^C e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})} \\ &= m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} e^C e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})}. \end{aligned}$$

Ora si noti che

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

dunque

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} = e^{1+\mathcal{O}(\frac{1}{m})}.$$

Abbiamo finalmente la *formula di Stirling*

$$m! = \sqrt{C_0 m} m^m e^{-m} e^{\mathcal{O}(\frac{1}{m})},$$

dove C_0 è una costante che non abbiamo calcolato ma che si può dimostrare essere, sorprendentemente, uguale a 2π .

Nelle discussioni di cui sopra abbiamo usato la notazione $\mathcal{O}(m^p)$. Come dovrete sapere essa designa una funzione incognita avente la seguente proprietà: esiste una costante $C_1 > 0$ tale che $|\mathcal{O}(m^p)| \leq C_1 m^p$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Ovviamente la formula di Stirling non è molto utile per un dato m a meno che non si abbia una stima concreta di C_0 e C_1 . Come utile esercizio vi invito a cercare di ottenere tale stima.

5. SOMMA GEOMETRICA

Come ultimo esempio consideriamo $f(x) = a^x$ per un qualche $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ (il caso $a = 1$ è già stato trattato). La primitiva è data da $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$, allora

$$\frac{a^{m+1} - 1}{\ln a} = \sum_{n=0}^m \frac{a^{n+1}}{\ln a} - \frac{a^n}{\ln a} = \sum_{n=0}^m \frac{a^n (a-1)}{\ln a} = \frac{a-1}{\ln a} \sum_{n=0}^m a^n.$$

Da cui segue la formula

$$\sum_{n=0}^m a^n = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}.$$

REFERENCES

CARLANGELLO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: `liverani@mat.uniroma2.it`