Analisi Matematica II

INGEGNERIA MEDICA

Secondo Appello, Sessione Estiva, Venerdì 25-07-14

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{a_n\}$ una successione che soddisfa la relazione ricorsiva
$$a_{n+1} = |2a_n - 1| \quad \text{per ogni } n \geqslant 0.$$
Si studi la convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
nei casi $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_0 = 2$.

2. Dato il problema di Chauchy
$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = x(t)\sin[x(t)^2] + e^t \\ &x(0) = 1, \end{aligned}$$
si mostri che, per ogni $t \geqslant 0$, $|x(t)| \leqslant e^t(1+t)$.

3. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|x\| < 1\}$ e $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x, (1,1,1)\rangle = 1\}$. Si mostri che, data una qualsiasi funzione differenziabile $f : B \to L$, $\det(Df(x)) = 0$ per ogni $x \in B$.

4. Siano $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sum_{i=1}^3 x_i^2 \leqslant 4\}$ e $V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sum_{i=1}^3 x_i^4 \leqslant 1\}$. Si calcolino gli integrali di superficie.
$$\int_{\partial V_1} \left(x_1x_2 - x_1^2 - x_1x_3 + x_3^2\right) dS$$
$$\int_{\partial V_2} \frac{x_1x_2^3 - x_1^4 - x_1x_3^3 + x_3^4}{[x_1^6 + x_2^6 + x_3^6]^{\frac{1}{2}}} dS$$

5. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|x\| < 3\}$ e $f \in \mathcal{C}^0(\bar{B}, \mathbb{R})$, differenziabile in B e tale che $f(x) = 3$ per ogni $x \in \partial B$. Si mostri che esiste $x_0 \in B$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

Soluzione

1. Se $a_0 = \frac{1}{2}$ allora $a_1 = 0$ e $a_n = 1$ per ogni $n \geqslant 2$, dunque
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$
che converge per ogni $x \in (-1, 1)$.
Se invece $a_0 = 2$, allora
$$a_{n+1} = 2a_n - 1 = 2^2 a_{n-1} - 2 - 1 = 2^{n+2} - \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+2} - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} + 1 - 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} + 1.$$
Quindi
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) x^n$$
che converge per $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Scrivendo l'equazione in forma integrale si ha
$$x(t) = e^t + \int_0^t x(s) \sin[x(s)^2] ds.$$
Ponendo $\xi(t) = |x(t)|$ si ottinene
$$\xi(t) \leqslant e^t + \int_0^t \xi(s) ds.$$
la disuguaglianza di Gronwall allora implica
$$\xi(t) \leqslant e^t + \int_0^t e^{t-s} e^s ds = e^t (t + 1).$$

3. Per definizione si ha, per ogni $x \in B$, $\langle f(x), (1,1,1) \rangle = 1$. Differenziando si ottiene $Df(x)(1,1,1) = 0$ per ogni $x \in B$. Dunque la matrice $DF(x)$ ha un nucleo e quindi $\det(Df(x)) = 0$.

4. Si noti che la normale esterna a V_1 è $n(x) = (x_1, x_2, x_3)\|x\|^{-1}$ mentre la normale esterna a V_2 è $n(x) = Z(x_1^3, x_2^3, x_3^3)$ dove $Z^{-2} = \sum_{i=1}^{3} x_i^6$. Dunque, nel primo caso
$$\int_{\partial V_1} \left(x_1 x_2 - x_1^2 - x_1 x_3 + x_3^3\right) dS = 2 \int_{\partial V_1} \langle (-x_1, x_1, x_3 - x_1), n(x) \rangle dS = 2 \int_{V_1} (-1+1) dV = 0.$$
Nel secondo
$$\int_{\partial V_2} \frac{x_1 x_2^3 - x_1^4 - x_1 x_3^3 + x_3^4}{[x_1^6 + x_2^6 + x_3^6]^{\frac{1}{2}}} dS = \int_{\partial V_2} \langle (-x_1, x_1, x_3 - x_1), n(x) \rangle dS = \int_{V_2} (-1+1) dV = 0.$$

5. Poichè f è una funzione continua su di un insieme compatto deve avere massimi e minimi. Se il massimo è strettamente maggirone di 3 allora non può essere sul bordo e quindi deve appartenere a B. Ovviamente in tale massimo $\nabla f = 0$. Se il minimo è strettamente minore di 3 allora non può essere sul bordo e quindi deve appartenere a B e nuovamente abbiamo un punto in B per cui $\nabla f = 0$. Se sia il minimo che il massimo sono uguali a 3 allora la funzione è costante e quindi $\nabla f \equiv 0$.