

Analisi Matematica II

INGEGNERIA MEDICA

Primo Appello, Sessione Estiva, Martedì 01-07-14

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{p_n\}$ una successione determinata dalla relazione ricorsiva

$$p_{n+1} = p_n \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) ; \quad p_0 = 1.$$

si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

2. Si verifichi se

$$d(x, y) = \left| \ln \left[\frac{y(1-x)}{(1-y)x} \right] \right|$$

è una metrica in $(0, 1)$. Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(1/n, 1/2).$$

3. Si determinino tutte le soluzioni di

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 1$$

tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} y(x) = 0$.

4. Sia $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$. Si calcoli

$$\int_D y^2 dx dy dz.$$

5. Si consideri la curva $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, 2az = x^2 + y^2\}$, $a > 0$, orientata in senso antiorario, e le forme differenziali

$$\omega_1 = 2x^2 y dx + y dy + z dz, \quad \omega_2 = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy + x dz.$$

Si calcoli $\int_\gamma \omega_1$ e $\int_\gamma \omega_2$.

Soluzione

1. Si ponga $a_n = \ln p_n$, allora si ha $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = a_n + \ln(1 - \frac{1}{2(n+1)})$. Ne segue che (lo si può dimostrare, ad esempio, per induzione)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - \frac{1}{2k}).$$

Ora

$$\ln(1 - \frac{1}{2k}) = - \int_{1-\frac{1}{2k}}^1 x^{-1} dx \leq -\frac{1}{2k}.$$

Dunque, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = 0.$$

2. Occorre verificare che

- (a) $d(x, y) = d(y, x)$ (ovvio dalla definizione)
- (b) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Per quanto riguarda (a), $d(x, x) = \ln 1 = 0$, se invece $d(x, y) = 0$ allora $\frac{y(1-x)}{(1-y)x} = 1$ ovvero $\frac{y}{1-y} = \frac{x}{1-x}$. Poichè la funzione $f(x) = \frac{x}{1-x}$ è invertibile nell'intervallo $(0, 1)$, ne segue che $x = y$, come richiesto. Per concludere,

$$d(x, z) = \left| \ln \left[\frac{z(1-x)}{(1-z)x} \right] \right| = \left| \ln \left[\frac{y(1-x)}{(1-y)x} \cdot \frac{(1-y)z}{(1-z)y} \right] \right| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dunque d è una distanza.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\frac{1}{n}, 1/2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \ln \left[n(1 - \frac{1}{n}) \right] \right| = +\infty.$$

Ovvero, $(0, 1)$ con la metrica di cui sopra ha diametro infinito.

3. Una soluzione particolare è $y(x) = -1$. Per risolvere l'equazione omogenea consideriamo il polinomio caratteristico associato:

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$

Che ha soluzioni $\lambda_n = e^{i\frac{\pi}{2}n}$, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = -1 + \sum_{n=0}^3 a_n e^{\lambda_n x}.$$

Per concludere si noti che $\Re(\lambda_0) = 1$ mentre $\Re(\lambda_n) \leq 0$ per $n \in \{1, 2, 3\}$. Dunque le soluzioni che soddisfano la condizione del testo sono

$$y(x) = -1 + \sum_{n=1}^3 a_n e^{\lambda_n x},$$

che formano uno spazio affine tridimensionale.

4. Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ allora

$$\begin{aligned} \int_D y^2 dx dy dz &= \int_C dx dy y^2 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz = 2 \int_{-1}^1 dy y^2 \sqrt{1-y^2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 dy y^2 (1-y^2) = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

5. Si noti che il sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3a^2 \\ 2az &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

implica $2az + z^2 = 3a^2$ che ha come soluzioni $\{-3a, a\}$. Poichè $z = -3a$, essendo $a > 0$, non soddisfa la seconda equazione del sistema, ne segue che deve essere $z = a$. Dunque la curva γ è data dalla circonferenza $\{z = a, x^2 + y^2 = 2a^2\}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1 &= \int_{\gamma} 2x^2 y dx + y dy = -8a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta + 2a^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -2a^4 \int_0^{2\pi} [\sin(2\theta)]^2 d\theta = -2\pi a^4. \end{aligned}$$

Invece,

$$\int_{\gamma} 2xy^2 dx + 2x^2 y dy = \int_{\gamma} d(x^2 y^2) = 0,$$

visto che è l'integrale di una forma esatta su di una curva chiusa. (Si noti che, se una proprio insiste nel volersi fare del male da sola, allora è possibile risolvere l'esercizio applicando la formula di Stokes alla calotta sferica al di sopra, o al di sotto, della circonferenza).