Analisi Matematica II

A

INGEGNERIA MEDICA

Secondo Appello, Prima Sessione, Mercoledì 19-02-14

Cognome......................... Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE ASSOLUTAMENTE fare l'esame orale	24 ☐ 25 ☐

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Si supponga che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converga per ogni $x \in (-1, 1)$. Quindi, per ogni $x \in (-1, 1)$ possiamo definire la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Si mostri che se $\sup_{x\in(-1,1)} |f'(x)| < \infty$, allora $a_n = o(n^{-1})$.

2. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ tale che

   (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(q) = f(q)$ per tutti i q tali che $q^2 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

   (b) $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x)| \leqslant 1$.

   Si mostri che f_n converge a f uniformemente.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ si trovi il valore massimo di $\prod_{i=1}^n x_i$ dove $x_i \geqslant 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i = C$.

4. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y''' - y'' + 2y' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

5. Si consideri il dominio

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant z \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \leqslant \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2\right\}.$$

Si calcoli l'area della superficie ∂C.

Analisi Matematica II **B**

INGEGNERIA MEDICA

Seconda Sessione, Primo Appello, Mercoledì 19-02-14

Cognome.......................... Nome..........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE ASSOLUTAMENTE fare l'esame orale	24 □ 25 □

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Si supponga che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converga per ogni $x \in (-1, 1)$. Quindi, per ogni $x \in (-1, 1)$ possiamo definire la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Si mostri che se $\int_{-1}^{1} |f(x)| < \infty$, allora $a_n = o(n)$.

2. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ tale che

   (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(q) = f(q)$ per tutti i q tali che $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

   (b) $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[0,1]} |f'_n(x)| \leqslant 1$.

   Si mostri che f_n converge a f uniformemente.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ si trovi il valore massimo di $\sum_{i=1}^{n} x_i$ dove $x_i \geqslant 0$ e $\prod_{i=1}^{n} x_i = C$.

4. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

5. Si consideri il dominio

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant z \leqslant 1, \ x^2 + y^2 \leqslant 4(1 - z)^2\}.$$

Si calcoli l'area della superficie ∂C.

Soluzione della versione A

1. Si ricordi che 1) il raggio di convergenza della serie derivata termine a termine è lo stesso di quello della serie (in questo caso almeno uno); 2) una serie di potenze converge uniformemente su ogni compatto contenuto nell' intervallo di convergenza (nel nostro caso almeno $(-1,1)$). Per un teorema sulle derivate delle successioni di funzioni segue che $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ per ogni $x \in (-1,1)$. Ne segue che, per ogni $L \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{L} a_n n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{L} a_n n x^{n-1} \leqslant \sup_{z \in (-1,1)} |f'(z)|.$$

   Dunque $\sum_{n=1}^{L} a_n n < \infty$ e **per il criterio necessario per la convergenza di una serie**

$$\lim_{n \to \infty} a_n n = 0,$$

   cioè $a_n = o(n^{-1})$

   Se l'argomento quì sopra vi pare troppo sofisticato, qualcosa sulla falsariga del seguente vi avrebbe comunque fruttato almeno 4 punti: Poichè f' è uniformante limitata e $f(0) = a_0$, ne segue che anche f è uniformante limitata, dunque per ogni $x \in (0,1)$,

$$a_k x^k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \leqslant \sup_{x \in (-1,1)} |f(x)| < \infty.$$

   Ovvero $a_n = \mathcal{O}(1)$. Per altro, qualunque altro *ragionamento* che mostrasse una comprensione *non meccanica* della materia sarebbe stato apprezzato.

2. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $L \geqslant 2\varepsilon^{-1}$ e $q_i = \frac{i}{L}$. Si noti che per ogni $i \leqslant L$, $q_i^2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dunque esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \bar{n}$

$$|f_n(q_i) - f(q_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per tutti gli } i \in \{0, \ldots, L\}.$$

   Inoltre, per ogni $x \in [0,1]$, esiste q_i tale che $|x - q_i| \leqslant L^{-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(q_i)| + |f_n(q_i) - f(q_i)| + |f(q_i) - f(x)| \\ &\leqslant \left[\sup_{z \in [0,1]} |f'(z)| + \sup_{x \in [0,1]} |f_n'(x)| \right] \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

   Dove abbiamo usato Lagrange per dire che

$$|f(q_i) - f(x)| = |f'(\xi)|\,|q_i - x| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f_n'(x)| \frac{\varepsilon}{2}$$

   e lo stesso per f_n. Oppure, in alternativa, si può usare il teorema fondamentale del calcolo per scrivere

$$|f(q_i) - f(x)| = \left| \int_{q_i}^{x} f'(z) dz \right| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f_n'(x)| |q_i - x| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f_n'(x)| \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Anche quì, qualunque discorso che mostrasse una, sia pur pallida, comprensione del problema (ovvero che la difficoltà risiede 1) nel trasferire una convergenza su di un insieme denso in una convergenza ad ogni punto; 2) nell'ottenere una uniformità nella convergenza) sarebbe stato generosamente premiato.

3. Il problema è banale per $n = 1$. Consideriamo quindi il caso $n > 1$. Prima di tutto notiamo che se un x_i è nullo allora il prodotto è nullo, valore che ovviamente non è il minimo, possiamo quindi assumere $x_i > 0$.

   Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dobbiamo trovare il massimo della funzione $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$ sul dominio $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i > 0\}$ e col vincolo $g_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$, dove $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è definita da $g_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i - C$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: dobbiamo quindi trovare il massimo della funzione $F_n(x) = \prod_{i=1}^n x_i + \lambda(\sum_{i=1}^n x_i - C)$ sul dominio $x_i > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vediamo i punti stazionari:

$$\prod_{k \neq i} x_k + \lambda = 0$$
$$\sum_{k=1}^n x_k - C = 0.$$

   Moltiplicando la prima riga per x_i si ha $\prod_{k=1}^n x_k = -\lambda x_i$. Sommando su i si ottiene

$$n \prod_{k=1}^n x_k = -\lambda \sum_{i=k}^n x_k = -\lambda C = C \prod_{k \neq i} x_k.$$

   da cui segue $x_i = \frac{C}{n}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Cerchiamo una soluzione del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$, ne segue che deve essere $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$, ovvero $\lambda \in \{0, \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}\} = \{0, \lambda_\pm\}$. Dunque la soluzione generale è data da $y(x) = a + be^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{x\sqrt{7}}{2}) + ce^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{x\sqrt{7}}{2})$ oppure, in forma complessa, $y(x) = a + be^{\lambda_- x} + ce^{\lambda_+ x}$. Imponendo le condizioni iniziali si ha (il conto si può fare anche usando la formula reale senza numeri complessi, ma è leggermente più noioso)

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \lambda_- b + \lambda_+ c = 0 \\ \lambda_-^2 b + \lambda_+^2 c = 0 \end{cases}$$

   ovvero $b = c = 0$, $a = 1$. Dunque la soluzione è $y(x) = 1$.

5. Si tratta di un cono di raggio di base 1 e altezza 2. Per risparmiare (il mio) tempo considero il caso generale $C(r, h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant z \leqslant h,\ x^2 + y^2 \leqslant r^2(1 - zh^{-1})^2\}$, cioè il cono di raggio di base r e altezza h. Ovviamente l'area della base sarà πr^2, rimane l'area laterale. Comincio col parametrizzare la superficie:

$$\sigma(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, h(1 - \rho r^{-1}))$$

   Dove $\rho \in [0, r]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora

$$\partial_\rho \sigma = (\cos\theta, \sin\theta, -hr^{-1})$$
$$\partial_\theta \sigma = \rho(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

   Dunque $\|\partial_\rho \sigma \wedge \partial_\theta \sigma\| = \|\rho(hr^{-1} \cos\theta, hr^{-1} \sin\theta, 1)\| = \rho\sqrt{1 + h^2 r^{-2}}$. Possiamo dunque calcolare l'area richiesta

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r d\rho \|\partial_\rho \sigma \wedge \partial_\theta \sigma\| = 2\pi \int_0^r d\rho\ \rho\sqrt{1 + h^2 r^{-2}} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

   In alternativa, si può vedere la supeficie come il grafico di $f(x, y) = (x, y, h(1 - r^{-1}\sqrt{x^2 + y^2})$ e usare la formula

$$\int_{x^2 + y^2 \leqslant r^2} dxdy \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}.$$

   Passando in coordinate polari si ottone lo stesso integrale calcolato sopra.

Soluzione della versione B

1. Si ricordi che una serie di potenze converge uniformemente su ogni compatto contenuto nell' intervallo di convergenza (nel nostro caso almeno $(-1,1)$). Dunque, per ogni $x \in (0,1)$, e $L \in \mathbb{N}$ (si noti l'integrale generalizzato, necessario visto che non sappiamo se f è limitata in $[-1,1]$. Inoltre considero solo x positivi per semplificarmi la vita)

$$+\infty > \lim_{x\to 1^-} \int_0^x |f(z)|dz \geqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n z^n dz$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \geqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{L} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{L} \frac{a_n}{n+1}.$$

Dunque $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} < \infty$ e per **il criterio necessario per la convergenza di una serie**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

cioè $a_n = o(n)$

2. Si veda la soluzione della parte A e si noti che $q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

3. Il problema è banale per $n = 1$. Consideriamo quindi il caso $n > 1$. Prima di tutto notiamo che se un x_i è nullo allora il prodotto è nullo e quindi il vincolo non può essere soddisfatto, possiamo quindi assumere $x_i > 0$. D'altra parte, se tutti gli x_i sono uguali a 1 meno $x_1 = Ca, x_2 = a^{-1}$, $a > 0$, allora il vincolo è soddisfatto. D'altro canto $\sum_{i=1}^n x_i = (n-2) + a^{-1} + Ca$. Poichè a può essere scelto arbitrariamente picciolo, ne segue che la somma può essere arbitrariamente grande, quindi non ha massimo. Al contrario, ha un minimo. Per trovarlo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: dobbiamo trovare il massimo della funzione $F_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda(\prod_{i=1}^n x_i - C)$ sul dominio $x_i > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vediamo i punti stazionari:

$$\prod_{k\neq i} x_k + \lambda = 0$$
$$\prod_{k=1}^{n} x_k - C = 0.$$

Moltiplicando la prima riga per x_i si ha $\prod_{k=1}^n x_k = -\lambda x_i$. Sommando su i si ottiene

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} x_k = -n \prod_{k=1}^{n} x_k = -nC$$

e

$$\prod_{k\neq i}^{n} x_k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_k = -\lambda \sum_{i=1}^{n} x_k = n \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Dividendo per $\prod_{k\neq i}^n x_k$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} x_k = n x_i$$

da cui segue che tutti gli x_i sono uguali e quindi $x_i = C^{\frac{1}{n}}$.

4. Cerchiamo una soluzione del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$, ne segue che deve essere $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, ovvero $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Dunque la soluzione generale è data da $y(x) = a + be^x + ce^{2x}$. Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$

ovvero $b = c = 0$, $a = 1$. Dunque la soluzione è $y(x) = 1$.

5. Si veda la soluzione della parte A.