Analisi Matematica II

A

INGEGNERIA MEDICA

Primo Appello, Prima Sessione, Mercoledì 5-02-14

Cognome......................... Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE ASSOLUTAMENTE fare l'esame orale	10 ☐ 11 ☐

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Si studi il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 - a_n)x^n.$$
2. Si calcoli $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ con una precisione di almeno 10^{-2}.
3. Si risolva l'equazione differenziale
$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$
4. Data la forma differenziale
$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$
sul dominio $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, si dica se è esatta.
5. Dato il dominio $\Delta_d = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_d \leqslant 1\}$, si calcoli
$$V(d) = \int_{\Delta_d} 1 \; dx_1 \cdots dx_d$$
al variare di $d \in \mathbb{N}$ e se ne spieghi il significato geometrico. Detta n_e la normale esterna a $\partial\Delta_3$ e $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, e^{x_1} \cos x_3, \sin(x_1 x_2^2))$ si calcoli
$$\int_{\partial\Delta_3} \langle f, n_e\rangle \, dS.$$

Analisi Matematica II

B

Ingegneria Medica

Prima Sessione, Primo Appello, Mercoledì 5-02-14

Cognome........................ Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE ASSOLUTAMENTE fare l'esame orale	10 □ 11 □

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Si studi il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} (3 - a_n) x^n.$$

2. Si calcoli $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ con una precisione di almeno 10^{-2}.

3. Si risolva l'equazione differenziale
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

4. Data la forma differenziale
$$\omega = -\frac{y}{x^2 + 4y^2} dx + \frac{x}{x^2 + 4y^2} dy$$
sul dominio $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, si dica se è esatta.

5. Dato il dominio $\Delta_d = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_d \leqslant 2\}$, si calcoli
$$V(d) = \int_{\Delta_d} 1 \, dx_1 \cdots dx_d$$
al variare di $d \in \mathbb{N}$ e se ne spieghi il significato geometrico. Detta n_e la normale esterna a $\partial\Delta_3$ e $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \cos x_3, x_2 + x_1, \cos(x_1 x_2^2))$ si calcoli
$$\int_{\partial\Delta_3} \langle f, n_e \rangle dS.$$

Soluzione della versione A

1. Si noti che $a_n \geqslant 0$ e se $a_n \leqslant 2$ allora $a_{n+1} \leqslant \sqrt{2+a_m} \leqslant 2$, dunque $a_n \in [0,2]$. Si ponga $b_n = 2 - a_n$, e si noti che $b_n \in [0,2]$. Allora
$$b_{n+1} = 2 - \sqrt{a_n+2} = 2 - \sqrt{4-b_n} = 2\left[1 - \sqrt{1-\frac{b_n}{4}}\right] = \int_0^{b_n} \frac{1}{4\sqrt{1-\frac{x}{4}}}dx \leqslant \frac{b_n\sqrt{2}}{4}.$$
Da cui segue $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Applichiamo il criterio del rapporto
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left[1-\sqrt{1-\frac{b_n}{4}}\right]}{b_n} = \lim_{b\to 0} \frac{2\left[\frac{b}{8} + \mathcal{O}(b^2)\right]}{b} = \frac{1}{4}.$$
Dunque il raggio di convergenza è 4. D'altro canto
$$b_{n+1} = \int_0^{b_n} \frac{1}{4\sqrt{1-\frac{x}{4}}}dx \geqslant \frac{b_n}{4}.$$
Dunque $b_n \geqslant 4^{-n}2$. Questo mostra che se $|x| = 4$ il termine n-esimo della serie non converge a zero e dunque la serie non converge. Se ne deduce the la serie converge solo per $x \in (-4,4)$.

2. Usando lo sviluppo in serie dell'esponenziale e il fatto che la serie converge uniformemente sui compatti si ha
$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$
Questo da la risposta voluta in quanto
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \leqslant \frac{1}{9}\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{4!4^{n-4}} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4!4^n} = \frac{1}{9\cdot 4!}\frac{4}{3} = \frac{1}{162}.$$
In alternativa, forse più semplicemente, si può usare la formula di Taylor, per e^z, al quarto ordine e scrivere, ponendo $z = x^2 \in [0,1]$,
$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{3} \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{e^{\xi}x^8}{4!}$$
dove $\xi \in [0,x^2] \subset [0,1]$. Ne segue che
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \int_0^1 \frac{ex^8}{4!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{e}{9\cdot 4!} \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{72}.$$
D'altro canto
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \geqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{9\cdot 4!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216}.$$
La differenza tra le due stime è di $\frac{2}{216} < \frac{1}{100}$ come richiesto.

3. Troviamo prima di tutto le soluzioni dell'equazione omogenea. Sostituendo $y(x) = e^{\lambda x}$ si ha $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha $\lambda = -1$ come unica soluzione. La soluzione generale dell'omogenea è quindi $y_0(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$. Per trovare una soluzione particolare proviamo con $y_p(x) = c\cos x + d\sin x$. Otteniamo $y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. Imponendo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali si ha
$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x,$$

4. Poichè

$$\partial_y \frac{-y}{x^2+y^2} = \partial_x \frac{x}{x^2+y^2}$$

la forma è chiusa. Tuttavia $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ **non** è un dominio semplicemente connesso poichè le curve che contengono zero al loro interno non sono omotope ad un punto (il dominio ha un "buco" in zero). Una forma è esatta solo se l'integrale della forma lungo qualunque curva chiusa è nullo. Poichè la forma è chiusa il suo integrale su qualunque curva chiusa che non contiene zero al suo interno è nullo. Per verificare se è esatta basta quindi controllare l'integrale lungo una qualsiasi curva che ha zero al suo interno. Consideriamo $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

Quindi la forma non è esatta.

5. Il calcolo esplicito dei casi $d \in \{1, 2, 3\}$ suggerisce di considerare un problema leggermente più generale: il volume del simplesso $\Delta_d(L) = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_d \leqslant L\}$, chiamiamolo $W(d, L)$. Cioè

$$W(d, L) = \int_{\Delta_d(L)} 1 \, dx_1 \cdots dx_d = \int_0^L dx_d \int_0^{x_d} dx_{d-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 1.$$

Suggerisce inoltre che potrebbe valere l'uguaglianza $W(d, L) = \frac{L^d}{d!}$. Verifichiamolo per induzione:

$$\begin{aligned} W(d+1, L) &= \int_0^L dx_{d+1} \int_0^{x_{d+1}} dx_d \cdots \int_0^{x_2} dx_1 1 = \int_0^L dx_{d+1} W(d, x_{d+1}) = \int_0^L dx_{d+1} \frac{x_{d+1}^d}{d!} \\ &= \frac{L^{d+1}}{(d+1)!}. \end{aligned}$$

Si noti che $V(d) = W(d, 1)$. Dunque $V(d) = \frac{1}{d!}$ ed è il volume del simplesso Δ_d. Per rispondere alla seconda domanda basta applicare la formula di Green e notare che $\operatorname{div} f = 1$, dunque la risposta è $\frac{1}{3!}$.

Soluzione della versione B

1. Si noti che $a_n \geqslant 0$ e se $a_n \leqslant 3$ allora $a_{n+1} \leqslant \sqrt{6+a_m} \leqslant 3$, dunque $a_n \in [0,3]$. Si ponga $b_n = 3 - a_n$, e si noti che $b_n \in [0,3]$. Allora

$$b_{n+1} = 3 - \sqrt{a_n + 6} = 3 - \sqrt{9 - b_n} = 3\left[1 - \sqrt{1 - \frac{b_n}{9}}\right] = \int_0^{b_n} \frac{1}{6\sqrt{1-\frac{x}{9}}} dx \leqslant \frac{b_n\sqrt{\frac{3}{2}}}{6}.$$

Da cui segue $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left[1 - \sqrt{1 - \frac{b_n}{9}}\right]}{b_n} = \lim_{b\to 0} \frac{3\left[\frac{b}{18} + \mathcal{O}(b^2)\right]}{b} = \frac{1}{6}.$$

Dunque il raggio di convergenza è 6. D'altro canto

$$b_{n+1} = \int_0^{b_n} \frac{1}{6\sqrt{1-\frac{x}{9}}} dx \geqslant \frac{b_n}{6}.$$

Dunque $b_n \geqslant 6^{-n}3$. Questo mostra che se $|x| = 6$ il termine n-esimo della serie non converge a zero e dunque la serie non converge. Se ne deduce the la serie converge solo per $x \in (-6, 6)$.

2. Usando lo sviluppo in serie del seno e il fatto che la serie converge uniformemente sui compatti si ha

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

Poichè abbiamo una serie a segni alterni i cui termini sono (in valore assoluto) decrescenti, sappiamo che l'errore è più piccolo del primo termine trascurato della serie, dunque

$$\left|\int_0^1 \sin(x^2)dx - \frac{1}{3} + \frac{1}{3!7}\right| \leqslant \frac{1}{5!11} = \frac{1}{1320}.$$

3. Troviamo prima di tutto le soluzioni dell'equazione omogenea. Sostituendo $y(x) = e^{\lambda x}$ si ha $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha $\lambda = 1$ come unica soluzione. La soluzione generale dell'omogenea è quindi $y_0(x) = ae^x + bxe^x$. Per trovare una soluzione particolare proviamo con $y_p(x) = c\cos x + d\sin x$. Otteniamo $y_p(x) = \frac{1}{2}\cos x$. Imponendo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali si ha

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{x}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x,$$

4. Poichè

$$\partial_y \frac{-y}{x^2+4y^2} = \partial_x \frac{x}{x^2+4y^2}$$

la forma è chiusa. Tuttavia $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ **non** è un dominio semplicemente connesso poichè le curve che contengono zero al loro interno non sono omotope ad un punto (il dominio ha un "buco" in zero). Una forma è esatta solo se l'integrale della forma lungo qualunque curva chiusa è nullo. Poichè la forma è chiusa il suo integrale su qualunque curva chiusa che non contiene zero al suo interno è nullo. Per verificare se è esatta basta quindi controllare l'integrale lungo una qualsiasi curva che ha zero al suo interno. Consideriamo $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + 4\sin^2 t} dt > 0,$$

visto che è l'integrale di una funzione strettamente positiva. Quindi la forma non è esatta.

5. Il calcolo esplicito dei casi $d \in \{1, 2, 3\}$ suggerisce di considerare un problema leggermente più generale: il volume del simplesso $\Delta_d(L) = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_d \leqslant L\}$, chiamiamolo $W(d, L)$. Cioè

$$W(d, L) = \int_{\Delta_d(L)} 1\, dx_1 \cdots dx_d = \int_0^L dx_d \int_0^{x_d} dx_{d-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 1.$$

Suggerisce inoltre che potrebbe valere l'uguaglianza $W(d, L) = \frac{L^d}{d!}$. Verifichiamolo per induzione:

$$\begin{aligned} W(d+1, L) &= \int_0^L dx_{d+1} \int_0^{x_{d+1}} dx_d \cdots \int_0^{x_2} dx_1 1 = \int_0^L dx_{d+1} W(d, x_{d+1}) = \int_0^L dx_{d+1} \frac{x_{d+1}^d}{d!} \\ &= \frac{L^{d+1}}{(d+1)!}. \end{aligned}$$

Si noti che $V(d) = W(d, 2)$. Dunque $V(d) = \frac{2^d}{d!}$ ed è il volume del simplesso Δ_d. Per rispondere alla seconda domanda basta applicare la formula di Green e notare che $\operatorname{div} f = 1$, dunque la risposta è $\frac{8}{3!}$.