EQUAZIONI DIFFERENZIALI

CARLANGELO LIVERANI

1. Disuguaglianza di Gronwall

Poichè la soluzione di una equazione differenziale si può sempre prolungare a meno che non esploda, è importante essere in grado di stimare come crescono le soluzioni. Uno strumento fondamentale per questo scopo è il seguente.

Lemma 1.1 (Disuguaglianza integrale di Gronwall)**.** *Siano* $L, T \in \mathbb{R}_+$ *e* $\xi, f \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$*. Se, per ogni* $t \in [0,T]$*,*

$$\xi(t) \leq L \int_0^t \xi(s)\, ds + f(t),$$

allora

$$\xi(t) \leq f(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\, ds.$$

Proof. Consideriamo prima il caso $f \equiv 0$. In tal caso il Lemma afferma semplicemente $\xi(t) \leq 0$. Poichè ξ è una funzione continua, esiste $t_* \in [0, (2L)^{-1}] \cap [0,T] =: I_1$ tale che $\xi(t_*) = \sup_{t \in I_1} \xi(t)$. Allora,

$$\xi(t_*) \leq L \int_0^{t_*} \xi(s)\, ds \leq \xi(t_*) L t_* \leq \frac{1}{2} \xi(t_*)$$

che implica $\xi(t_*) \leq 0$, quindi $\xi(t) \leq 0$ per ogni $t \in I_1$. Se $I_1 = [0,T]$, abbiamo dimostra quanto volevamo. Altrimenti, ponendo $t_1 := (2L)^{-1}$ si ha

$$\xi(t) \leq L \int_{t_1}^t \xi(s)\, ds$$

e possiamo ripetere il ragionamento precedente per l'intervallo $[t_1, 2t_1]$. Iterando questo modo di procedere si ha $\xi(t) \leq 0$ per tutti $t \in [0,T]$.

Il caso generale si riduce a quello appena trattato. Sia

$$\zeta(t) := \xi(t) - f(t) - L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\, ds.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &\leq L \int_0^t \xi(s)\, ds - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s)\, ds \\
&= L \int_0^t \zeta(s)\, ds + L \int_0^t \left\{ f(s) ds + L \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \\
&\quad - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Si noti che

$$\int_0^t dsL \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau)\, d\tau = L\int_0^t d\tau f(\tau)\int_\tau^t dse^{L(s-\tau)}$$
$$= \int_0^t f(s)\{e^{L(t-s)} - 1\}ds.$$

Quindi,

$$\zeta(t) \leq L\int_0^t \zeta(s)\, ds.$$

Abbiamo quindi ridotto il problema al caso precedente, ottenendo quindi $\zeta(t) \leq 0$ da cui segue quello che volgiamo. □

Facciamo una semplice applicazione.

Lemma 1.2. *Per ogni* $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M(d \times d))$,[1] *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$
$$x(0) = x_0.$$

Se $\|A(t)\| \leq L$ *per ogni* $0 \leq t \leq T \in \mathbb{R}$, *allora* $\|x(t)\| \leq e^{Lt}\|x_0\|$ *per tutti* $0 \leq t \leq T$.

Proof. Scriviamo l'equazione in forma integrale

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|A(s)x(s)\|\, ds \leq \|x_0\| + L\int_0^t \|x(s)\|\, ds.$$

Ponendo $\xi(t) := \|x(t)\|$ e applicando il Lemma 1.1 si ha il risultato annunciato. □

Corollario 1.3. *Se nel Lemma precedente* $\|A(t)\| \leq L$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *allora la soluzione è definita su tutto* $\mathbb{R}$.

2. Dipendenza da un parametro

Avendo satiabilito l'esistenza e l'unicità delle solutioni, la prossima domanda naturale è:
Domanda: Come dipendono le soluzioni dalle condizioni iniziali? Come dipendono le soluzioni da un parametro nel campo vettoriale?

Teorema 2.1 (Dipendenza liscia da un parametro)**.** *Siano* $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$, *e* $A \subset \mathbb{R}^d$ *e* $U \subset \mathbb{R}^m$ *insiemi aperti. Si assuma che esista* $\delta > 0$ *tale che, per ogni* $x_0 \in A$ *e* $\lambda \in U$ *il problema di Cauchy*

$$\dot{x} = V(x, t, \lambda)$$
$$x(0) = x_0$$

ammette una soluzione $\mathcal{C}^1((-\delta, \delta), \mathbb{R}^d)$, *chiamiamola* $X(t, x_0, \lambda)$. *Allora, per ogni* $(x_0, t) \in A \times (-\delta, \delta)$, $X(t, x_0, \cdot) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^d)$.

Proof. Per ogni $x_0 \in A$ si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}(t) = \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \cdot \xi(t) + \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \\ &\xi(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove ξ ha valori in $M(d \times m)$. Dimostreremo che $\xi(t) = \partial_\lambda X(t, x_0, \lambda)$. Per verificarlo è sufficiente mostrare che esiste $C > 0$ tale che, per $h \in \mathbb{R}^m$ abbastanza piccolo, se

[1] Con $M(d \times d)$ si intendono le matrici $d \times d$.

$\zeta(t,h,\lambda) := X(t,x_0,\lambda+h) - X(t,x_0,\lambda) - \xi(t)h$, allora $\|\zeta(t,h)\| \le C\|h\|^2$. Dalla formula di Taylor segue

$$\begin{aligned}\dot\zeta(t,h) &= V(X(t,x_0,\lambda+h),t,\lambda+h) - V(X(t,x_0,\lambda),t,\lambda)\\ &\quad - \partial_x V(X(t,x_0,\lambda),t)\cdot\xi(t)h - \partial_\lambda V(X(t,x_0,\lambda),t,\lambda)h\\ &= \partial_x V(X(t,x_0,\lambda),t)\cdot\zeta(t,h) + R(t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove

$$\begin{aligned}\|R(t)\| &\le C\left(\|X(t,x_0,\lambda+h) - X(t,x_0,\lambda)\|^2 + \|h\|^2\right)\\ &\le 2C(\|\zeta(t,h)\|^2 + (1+\|\xi(t)\|^2)\|h\|^2).\end{aligned}$$

con $C = \|V\|_{\mathcal{C}^2}$. Nota che $\zeta(0) = 0$. Concludiamo usando Lemma 1.1. Infatti Lemma applicato a (2.1) implica $\|\xi(t)\| \le e^{C_1 t}$, per qualche $C_1 > 0$. Sia $T > 0$ il tempo più piccolo per cui $\|\zeta(t,h)\| \le 1/2$ e $e^{2C_1T} \le 2$. Allora, per $t \le T$, (2.2) implica

$$\|\zeta(t,h)\| \le \int_0^t 2C\|\zeta(s)\|ds + 3\|h\|^2$$

e Lemma 1.1 implica il risultato voluto. □

Problema 2.2. *Provare il Teorema 2.1 sotto l'ipotesi, più debole $V \in \mathcal{C}^1$.*

Corollario 2.3 (Dipendenza liscia dalle condition iniziali)**.** *Sia $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R}^d)$, e δ e A come nel Lemma precedente. Per ogni $x_0 \in A$ sia $X(t,x_0)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy allora, per ogni $t \in (-\delta,\delta)$, $X(t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^d)$ e $\xi = \partial_{x_0}X$ è la soluzione di*

$$\begin{aligned}&\dot\xi(t) = \partial_x V(X(t,x_0),t)\cdot\xi(t)\\ &\xi(0) = \mathbb{1}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Proof. Si ponga $z = x - x_0$. Allora z soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned}&\dot z = V(z+x_0,t) =: \bar V(z,t,x_0)\\ &z(0) = 0.\end{aligned}$$

Si può quindi considerate x_0 come un parametro. Il risultato voluto segue quindi applicando il Teorema 2.1. □

3. Stabilità

Sia $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ un campo vettoriale e $\bar x \in \mathbb{R}^d$ tale che $V(\bar x) = 0$. Allora $x(t) = \bar x$ è una soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{aligned}&\dot x = V(x)\\ &x(0) = \bar x.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ci si può quindi chiedere che succede per condizioni inziali che differiscono di poco da $\bar x$. Sappiamo che le soluzioni dipendono con continiuità dal dato iniziale e la derivata in $\bar x$ è data dalla soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}&\dot\xi = DV(\bar x)\xi\\ &\xi(0) = \mathbb{1},\end{aligned}$$

la cui soluzione è $\xi(t) = e^{DV(\bar x)t}$. Nel caso in cui la parte reale di tutti gli autovalori di $DV(\bar x)$ sia negativa, si ha $\lim_{t\to\infty}\xi(t) = 0$ dunque sembrerebbe le soluzioni che partono vicine a $\bar x$ tendono a $\bar x$, dunque il punto fisso $\bar x$ è stabile. Ma questo vale solo per l'equazione linearizzata, la vera dinamica si compoterà nello stesso modo? Consideriamo il caso semplice in cui $DV(\bar{x})$ è diagonalizzabile e ha tutti autovalori reali e negativi, minori di $-\lambda < 0$. Sia V la matrice che diagonalizza. Ovvero $VDV(\bar{x})V^{-1} = \Lambda$ dove $\Lambda_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_i$ con $\lambda_i \leq -\lambda$. Allora si consideri il prodotto scalare

$$\langle v, w\rangle_V = \langle Vv, Vw\rangle.$$

Per ogni $v \in \mathbb{R}^d$, si ha

$$\begin{aligned}\langle v, DV(\bar{x})v\rangle_V = \langle v, V^{-1}\Lambda Vv\rangle_V = \langle Vv, \Lambda Vv\rangle = \sum_{i=1}^{d}\lambda_i(Vv)_i^2\\ \leq -\lambda\sum_{i=1}^{d}(Vv)_i^2 = -\lambda\langle v, v\rangle_V.\end{aligned}$$

Allora, se $x(t)$ è una soluzione di (3.1) con condizione iniziale $x(0) = x_0$ vicina a $\bar{x}$, poniamo $z(t) = \langle x(t) - \bar{x}, x(t) - \bar{x}\rangle_V$ e vediamo a che equazione differenziale soddisfa. Sviluppando il campo vettoriale con Taylor al secondo ordine nell'intorno di $\bar{x}$ si ha, per qualche constante $C > 0$,

$$\dot{z} = 2\langle x(t) - \bar{x}, V(x(t))\rangle_V \leq 2\langle x(t) - \bar{x}, DV(\bar{x})(x(t) - \bar{x})\rangle_V + Cz^{\frac{3}{2}} \leq -2\lambda z + Cz^{\frac{3}{2}}.$$

Se la condizione iniziale è sufficientemente vicina a $\bar{x}$, allora $z(0) \leq \frac{1}{2C^2}\lambda^2$ e, per la continuità della soluzione, esisterà $t_1 > 0$ per cui $z(t) \leq C^{-2}\lambda^2$ per ogni $t \in [0, t_1]$. Allora

$$z(t) \leq z(0) - \lambda\int_0^t z(s)ds$$

da cui, per la disuguaglianza di Gronwall, segue $z(t) \leq z(0)e^{-\lambda t}$. Abbiamo quindi che la soluzione si avvicina a $\bar{x}$, dunque l'equilibrio è stabile.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it