π

CARLANGELO LIVERANI

1. Il problema

Nelle lezioni precedenti abbiamo incontrato il numero π, definito come il rapporto tra la circonferenza ed il diametro di un cerchio, tuttavia nulla sappiamo di tale numero, viene quindi naturale domandarsi se sia possibile calcolarlo con una precisione arbitraria. In realtà esistono molti modi di farlo, qui ne illustrerò uno elementare che si avvale solo di fatti già discussi.[1]

2. Un'idea

L'idea di base è molto semplice: poichè, per $x \in [0, \pi]$,

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \tag{1}$$

si può calcolare il coseno di un angolo piccolo in funzione di un angolo più grande. D'altro canto, per ongi $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} (1 - \cos \frac{a}{n}) n^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 (1 - \cos^2 \frac{a}{n})}{1 + \cos \frac{a}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n}{a} \sin \frac{a}{n} \right]^2 a^2 (1 + \cos \frac{a}{n})^{-1} = \frac{a^2}{2}.$$

L'idea è quindi di considerare la successione di angoli definita da $x_n = 2^{-n-1}\pi$, dunque $x_{n+1} = x_n/2$. Risulta allora conveniente definire la variabile

$$\xi_n := \frac{1 - \cos x_n}{2}.$$

Dall'equazione (1), si ha

$$\xi_{n+1} = \frac{1 - \cos x_{n+1}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \cos x_n}{2}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_n}}{2} =: f(\xi_n).$$

Mettendo assieme le considerazioni di cui sopra si ha

$$\lim_{n \to \infty} 2^{2n} \xi_n = \frac{1}{8} \lim_{n \to \infty} (2^{n+1})^2 (1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}) = \frac{\pi^2}{16}. \tag{2}$$

Date: October 1, 2012.

[1] Per ovvie ragioni ottenere stime di π è stato un problema presente in tutte le culture e in tutti i tempi, per esempio duemila anni prima di Cristo gli Egiziani usavano $(\frac{3}{4})^4 = 3,160493827...$ i Babilonesi $\frac{25}{8} = 3.125$, gli Indiani $\sqrt{10} = 3,16227766....$ U'altra stima di π si trova nella Bibbia, primo libro dei Re, capitolo 7, verso 23 dove π è approssimato con 3. Ma la prima stima *rigorosa* è dovuta ad Archimede (250 prima di Cristo): $3.14084506 \leq 3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7} \leq 3.14285715$, dunque con un errore inferiore a due millesimi. Il valore $\frac{22}{7}$ è spesso usato anche oggi per lavori che non richiedono grande precisione. Se siete curiosi di vedere qualche cifra di π, guardate alla fine di questa nota.

Abbiamo così trovato una successione che ha per limite un numero relato a π, possiamo quindi calcolare π con una precisione arbitraria[2]

Tuttavia rimane il problema: se ci serve una precisione ε quale n dobbiamo usare?

3. Una stima

Per avere una idea della velocità di convergenza è utile fare un poco di algebra preliminare:

$$
\begin{aligned}
f(\xi) =& \frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2} = \frac{\xi}{2(1+\sqrt{1-\xi})} = \frac{\xi}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2(1+\sqrt{1-\xi})}\right] \\
=& \frac{\xi}{4}\left[1 + \frac{\xi}{(1+\sqrt{1-\xi})^2}\right].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Si noti che possiamo dimostrare, per induzione, che $\xi_n \in [0, \frac{1}{2}]$, infatti $\xi_0 = \frac{1}{2}$ e

$$
\xi_{n+1} \leq \frac{\xi_n}{4}\left[1 + \frac{1}{2}\right] \leq \frac{3\xi_n}{8} \leq \frac{\xi_n}{2} \leq \frac{1}{2}.
$$

Un rapido sguardo all'ultima riga mostra che abbiamo appena dimostrato il risultato, assai più forte, $\xi_n \leq 2^{-n-1}$.

Inoltre, sempre per induzione e utilizzando (3) si ha la formula, per ogni $n > 0$,

$$
\xi_n = 2^{-2n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 + \frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}. \tag{4}
$$

Questo ci permette di riscrivere (2) come

$$
\pi = \sqrt{8 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 + \frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}}. \tag{5}
$$

Per studiare meglio il limite sotto radice è utile riscriverlo come

$$
\prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 + \frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left\{1 + \frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}}.
$$

da tale formula segue[3]

$$
1 \leq \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 + \frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\} \leq e^{\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k} \leq e^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-1}} \leq e.
$$

[2] Questo a patto di essere in grado di estrarre radici quadrate.

[3] Se non capite le stime nelle seguenti catene di disuguaglianze, significa che non avete studiato sufficientemente la nota sui logaritmi e la nota su e. Male! Solo guai deriveranno da questa vostra trascuratezza.

Il che significa $2.8 \le \sqrt{8} \le \pi \le \sqrt{8e} \le 4.7$.[4] Inoltre, per ogni $n > m$, si ha

$$\begin{aligned}
0 \le &\prod_{k=0}^{n-1}\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\} - \prod_{k=0}^{m-1}\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}\\
&= \left[e^{\sum_{k=m}^{n-1}\ln\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}}-1\right]e^{\sum_{k=0}^{m-1}\ln\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}}\\
&\le \left[e^{\sum_{k=m}^{n-1}\xi_k}-1\right]e^{\sum_{k=0}^{m-1}\xi_k} \le \left[e^{\sum_{k=m}^{n-1}2^{-k-1}}-1\right]e^{\sum_{k=0}^{m-1}2^{-k-1}}\\
&\le \left[e^{2^{-m}}-1\right]e \le 2^{-m+1}e.
\end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza dipende dal fatto che, poichè per ogni $x \in (0,1)$

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x)$$

e ponendo $z = \frac{x}{1+x}$ si ha $z \le \ln(1+\frac{z}{1-z})$. Quindi, esponenziando $e^z \le 1+\frac{z}{1-z}$ cioè $e^z - 1 \le \frac{z}{1-z}$ e, se $z \in (0,1/2)$, $e^z \le 2z$.

Possiamo dunque concludere[5]

$$\begin{aligned}
0 \le &\pi - \sqrt{8\prod_{k=0}^{n-1}\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}} \le \frac{\pi^2 - 8\prod_{k=0}^{n-1}\left\{1+\frac{\xi_k}{(1+\sqrt{1-\xi_k})^2}\right\}}{2\pi}\\
&\le 2^{-n+1}e.
\end{aligned}$$

4. Cifre

Ecco le prime cinquecento cifre:
π= 3.

```
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
.......... .......... .......... .......... ..........
```

Per quanto ne so al momento sono state calcolate almeno 10^{13} cifre ma se vi interessa, cercate su internet e ne scoprirete di più.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it

[4] Questo ci da una prima idea di quanto valga π, una stima abbastanza patetica per la verità, ma che è la base dei successivi raffinamenti.

[5] Per la verità la stima qui sopra è lungi dall'essere ottimale, lavorando più duramente si può dimostrace che l'errore è dell'ordine di 2^{-2n} piuttosto che 2^{-n}, tuttavia ci mostra come l'algoritmo converge. Vi potete divertire a programmarlo e vedere come se la cava nella realtà (non in maniera inpressionante per la verità usando $n = 4$ si ottinete 3.1403... che è comparabile col risutltato di Archimede. Vedremo algoritmi più efficienti nel proseguo del corso.