Analisi Matematica I **A**

INGEGNERIA (CANALE CET-FER)

Prima Sessione, Secondo Appello, Lunedì 18-02-13

Cognome......................... Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE ASSOLUTAMENTE fare l'esame orale

22 ☐ 23 ☐
25 ☐ 26 ☐ 27 ☐ 28 ☐ 1 ☐

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(n^{\frac{n+\log n}{2n^2+3}} - 1\right) \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x+1}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di concavità e convessità, eventuali punti di flesso.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-4x^2}$$

4. Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' + y = \cos(2x)$$

5. Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$z^3 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}$$

Analisi Matematica I **B**

Ingegneria (Canale CET-FER)

Prima Sessione, Secondo Appello, Lunedì 18-02-13

Cognome........................ Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE fare l'esame orale	22 ☐ 23 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27 ☐ 28 ☐ 1 ☐

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+n}\left(n^{\frac{n+2}{2n^2+3e^{-n}}}-1\right) \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1/2}$$

☐

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (1-2x)e^{\frac{1}{2x-1}}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di concavità e convessità, eventuali punti di flesso. ☐

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^2 dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

☐

4. Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' + 2y = 2\sin x$$

☐

5. Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$z^3 = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$$

☐

Analisi Matematica I **A1**

INGEGNERIA (CANALE CET-FER)

Prima Sessione, Secondo Appello, Lunedì 18-02-13

Cognome......................... Nome.........................

Indicate qui a lato con una crocetta in quali giorni NON POTETE fare l'esame orale	22 ☐ 23 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27 ☐ 28 ☐ 1 ☐

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(n^{\frac{n+\log n}{2n^2+3}} - 1\right) \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x+1}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di concavità e convessità, eventuali punti di flesso.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-4x^2}$$

4. Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$z^3 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}$$

5. Studiare convergenza semplice e assoluta, al variare di x, della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\arctan x)^n}{n^3+\pi^n}$$

Soluzione della versione A

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(n^{\frac{n+\log n}{2n^2+3}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(e^{O(\frac{\log n}{n})} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} O\left(\frac{\sqrt{n}\log n}{n}\right) = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x+1} &= \lim_{x\to\infty} e^{(2x+1)\ln\frac{1-x^{-1}}{1+x^{-1}}} = \lim_{x\to\infty} e^{(2x+1)\ln(1-2x^{-1}+O(x^{-2}))}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{(2x+1)(-2x^{-1}+O(x^{-2}))} = e^{-4}.\end{aligned}$$

2. If dominio di definizione è $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Inoltre,

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{z\to-\infty}\frac{e^z}{z} = 0\ ; \quad \lim_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{z\to+\infty}\frac{e^z}{z} = +\infty.$$

Per $x \to \infty$ abbiamo

$$f(x) = (x-2)\left[1 + \frac{1}{x-2} + O(x^{-2})\right] = x - 1 + O(x^{-1})$$

quindi la funzione ha un asintoto obliquo, dato dalla retta $y = x - 1$. Infine,

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x-3}{x-2}\ ; \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}}\frac{1}{(x-2)^3}.$$

Se ne deduce che la funzione è crescente per $x < 2$ e $x > 3$, ha un minimo in $x = 3$ and è decrescente per $x \in (2,3)$. Infine la funzione è concava e giace sotto la retta $x-1$ per $x < 2$, mentre è convessa e giace sopra la retta $x-1$ per $x > 2$.

3. Risulta conveniente fare la sostituzione $x = \frac{1}{2}\sin\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-4x^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta(\cos\theta)^2\left(\frac{(\sin\theta)^3}{8} + \sin\theta\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sin\theta\left(\frac{(\cos\theta)^2-(\cos\theta)^4}{8} + (\cos\theta)^2\right) = [z = \cos\theta]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dz\left[\frac{z^2-z^4}{8} + z^2\right] = \frac{1}{48} - \frac{1}{80} + \frac{1}{6} = \frac{7}{40}.\end{aligned}$$

4. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

le cui radici sono $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = a\,e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della equazione inomogenea della forma

$$\bar{y}(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Sostituendo questa funzione nell'equazione, si trova

$$(A + 2B - 4A)\cos(2x) + (B - 2A - 4B)\sin(2x) = \cos(2x)$$

che è soddisfatta se e solo se

$$2B - 3A = 1, \quad -2A - 3B = 0$$

la cui soluzione è

$$A = -\frac{3}{13}, \quad B = \frac{2}{13}$$

Pertanto la soluzione generale è:

$$y(x) = a\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{3}{13}\cos(2x) + \frac{2}{13}\sin(2x)$$

5. Si noti che

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow w := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Ne segue che le 3 soluzioni distinte dell'equazione $z^3 = w$ sono date da

$$z_k = 2^{\frac{1}{3}} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0, 1, 2$$

In coordinate cartesiane

$$z_0 = 2^{-\frac{2}{3}}(\sqrt{3} - i), \quad z_1 = 2^{-\frac{2}{3}}(-\sqrt{3} - i), \quad z_2 = 2^{\frac{1}{3}} i$$

Soluzione della versione B

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(n^{\frac{n+2}{2n^2+3e^{-n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(e^{O(\frac{\log n}{n})}-1\right)=\lim_{n\to\infty}O\left(\frac{\sqrt{n}\log n}{n}\right)=0.$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1/2}=\lim_{x\to\infty}\frac{[(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2}{(1+\frac{1}{x})^x}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{1/2}=\frac{e^2}{e}\cdot 1=e.$$

In alternativa,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1/2}&=\lim_{x\to\infty}e^{(x+\frac{1}{2})\ln\frac{1+2x^{-1}}{1+x^{-1}}}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^{-1}+O(x^{-2}))}\\&=\lim_{x\to\infty}e^{(x+\frac{1}{2})(x^{-1}+O(x^{-2}))}=e.\end{aligned}$$

2. If dominio di definizione è $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(1-2x)e^{\frac{1}{2x-1}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^{-z}}{z}=0\ ;\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}(1-2x)e^{\frac{1}{2x-1}}=\lim_{z\to+\infty}-\frac{e^z}{z}=-\infty.$$

Per $x\to\infty$ abbiamo

$$f(x)=(1-2x)\left[1+\frac{1}{2x-1}+O(x^{-2})\right]=-2x+O(x^{-1})$$

quindi la funzione ha un asintoto obliquo. Infine,

$$f'(x)=4e^{\frac{1}{2x-1}}\frac{1-x}{2x-1}\ ;\quad f''(x)=-4e^{\frac{1}{2x-1}}(2x-1)^{-3}.$$

Se ne deduce che la funzione ha un massimo a 1. Inoltre, è positiva, convessa e giace sopra la retta $-2x$ per $x<\frac{1}{2}$, mentre è negativa, concava e giace sotto la retta $-2x$ per $x>\frac{1}{2}$.

3. Risulta conveniente fare la sostituzione $x=2\sin\theta$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, da cui

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta(\cos\theta)^2\left(8(\sin\theta)^3+4\sin\theta\right)\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\sin\theta\left(3(\cos\theta)^2-2(\cos\theta)^4\right)=[z=\cos\theta]\\&=8\int_0^1 dz(3z^2-2z^4)=8\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{24}{5}.\end{aligned}$$

In alternativa, si consideri la sostituzione $z^2=1-\frac{x^2}{4}$, da cui segue

$$\int_0^2 dx\ (x^3+2x)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=8\int_0^1 z^2(3-2z^2)=8\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{24}{5}.$$

4. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2+\lambda+2$$

le cui radici sono $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = ae^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + be^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x.$$

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della equazione inomogenea della forma

$$y_p(x) = A\sin x + B\cos x.$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) &= -A\sin x - B\cos x + A\cos x - B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x \\ &= 2\sin x. \end{aligned}$$

Da cui abbiamo il sistema

$$\begin{cases} -A - B + 2A = 2 \\ -B + A + 2B = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = 1$, $B = -1$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = ae^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + be^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \sin x - \cos x.$$

5. Nota che $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ and $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione come

$$z^3 = \frac{2e^{-i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{-i\frac{3}{2}\pi} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Da cui segue $z = 2^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}k}$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, ovvero $z \in \{2^{\frac{1}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}), 2^{\frac{1}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}), -2^{\frac{1}{3}}i\}$.
In alternativa,

$$z^3 = \frac{(1 - 1 - 2i)^2}{1 - 1 + 2i} = \frac{-2}{i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$