

Analisi Matematica I
INGEGNERIA (CANALE CET-FER)
Prima Sessione, Primo Appello, Venerdì 08-02-13

A

Cognome..... Nome.....

Indicate qui a lato con una crocetta in quale appello pensate di fare l'esame orale	1 ☐ 2 ☐
--	--

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \sin \frac{1}{n} \right] \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 1)e^{(2-x)(x-1)}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescita e decrescenza.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

4. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = (1 + 2y^2)x \quad , \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e se ne indichi l'insieme di definizione.

5. Si studi la continuità della funzione $f(x, y)$ seguente e delle sue derivate parziali rispetto a x e y

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analisi Matematica I
INGEGNERIA (CANALE CET-FER)
Prima Sessione, Primo Appello, Venerdì 08-02-13

B

Cognome..... Nome.....

Indicate qui a lato con una crocetta in quale appello
pensate di fare l'esame orale

1 ☐

2 ☐

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - 2n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \right] \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3}$$

☐

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 2)e^{(2-x)(x-1)}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescita e decrescenza.

☐

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

4. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = (2 + y^2)x^3 \quad , \quad y(0) = \sqrt{2}$$

e se ne indichi l'insieme di definizione.

☐

5. Si studi la continuità della funzione $f(x, y)$ seguente e delle sue derivate parziali rispetto a x e y

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

☐

Analisi Matematica I

INGEGNERIA (CANALE CET-FER)

Prima Sessione, Primo Appello, Venerdì 08-02-13

Riservato agli studenti che hanno già superato Analisi II da 10 crediti.

A1

Cognome..... Nome.....

Indicate qui a lato con una crocetta in quale appello
pensate di fare l'esame orale

1 ☐

2 ☐

Ci sono 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \sin \frac{1}{n} \right] \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3}$$

☐

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 1)e^{(2-x)(x-1)}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescita e decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità.

☐

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

☐

4. Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$2z^2 + (1 + 3i)z - 1 = 0$$

☐

5. Studiare convergenza semplice e assoluta, al variare di x , della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$$

☐

Soluzione della versione A

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \sin \frac{1}{n} \right] \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3}$$

Sol.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \sin \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \mathcal{O}(n^{-5}) \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} - x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{6} + \mathcal{O}(x^2) \right)}{x^{\frac{3}{2}}(1 + o(1))} = 0.$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{(2-x)(x-1)}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescita e decrescenza.

Sol. La funzione è definita ovunque, si annulla solo per $x = 1$, è negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, per cui l'asse x è un asintoto orizzontale. Un calcolo diretto mostra che

$$f'(x) = -e^{(2-x)(x-1)} (2x^2 - 5x + 2)$$

che si annulla per $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$, è positiva per $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ ed è negativa altrove. Ne segue immediatamente che la funzione ha un minimo (negativo) in $x = \frac{1}{2}$ e un massimo (positivo) in $x = 2$.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

Sol. Questo esercizio si può fare in vari modi; qui ne discutiamo uno. Un altro metodo è discusso nella soluzione del compito B.

Se facciamo la sostituzione $z = x - 1$, otteniamo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \int_0^\infty \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z^2 + 1}}.$$

A questo punto è naturale usare la sostituzione $z = \sinh y$, cosicché $z^2 + 1 = (\cosh y)^2$, $dz = dy \cosh y$ e gli estremi di integrazione non cambiano. Dunque, usando anche la $\sinh y = (e^y - e^{-y})/2$ e facendo l'ulteriore sostituzione $w = e^y$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 2}} &= \int_0^\infty \frac{dy}{\sinh y + 1} = \int_0^\infty \frac{2e^y}{e^{2y} + 2e^y - 1} dy = 2 \int_1^\infty \frac{dw}{w^2 + 2w - 1} \\ &= 2 \int_1^\infty \frac{dw}{(w+1-\sqrt{2})(w+1+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^\infty dw \left[\frac{1}{w+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{w+1+\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{w+1-\sqrt{2}}{w+1+\sqrt{2}} \Big|_1^\infty = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

in quanto $\lim_{w \rightarrow +\infty} \ln \frac{w+1-\sqrt{2}}{w+1+\sqrt{2}} = \ln 1 = 0$.

4. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = (1 + 2y^2)x \quad , \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e se ne indichi l'insieme di definizione.

Sol. La equazione si può integrare separando le variabili

$$\int_0^x \frac{y'(z)}{1 + 2y^2(z)} dz = \int_0^x z dz.$$

Poiché, per $x \geq 0$, si ha $y'(x) \geq 0$, è possibile cambiare variabile e ottenere, per $x \geq 0$,

$$\frac{x^2}{2} = \int_{1/\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{1}{1 + 2y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}y(x)) - \arctan 1 \right].$$

Questo implica che

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \left[\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right].$$

L'insieme di definizione della soluzione deve contenere il punto $x = 0$ e deve soddisfare la condizione che l'argomento della tangente non assuma nessuno dei valori in cui la tangente è divergente. Bisogna pertanto richiedere che

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \in \left(-\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

5. Si studi la continuità della funzione $f(x, y)$ seguente e delle sue derivate parziali rispetto a x e y

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sol. $f(x, y)$ è ovviamente continua e differenziabile in tutti i punti diversi da $(0, 0)$; rimane dunque da studiare solo il comportamento in tale punto. Poiché $|x^2 y| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$ e $|\sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})| \leq 1$, si ha che $|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$; dunque $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, quindi $f(x, y)$ è continua anche in $(0, 0)$.

D'altro canto, per $(x, y) \neq (0, 0)$, le derivate parziali si possono calcolare con le solite regole ottenendo

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 2xy \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + x^2 y (-x) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \partial_y f(x, y) &= x^2 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + x^2 y (-y) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

mentre le derivate parziali in $(0, 0)$ si debbono calcolare come il limite del rapporto incrementale, ovvero

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0; \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

A questo punto basta notare che $|\partial_x f(x, y)| \leq 2|xy| + |x^3 y| (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \leq 2(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2}$, per concludere che anche $\partial_x f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$. Un simile argomento si applica a $\partial_y f(x, y)$.

Soluzione della versione B

1. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - 2n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \right] \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3}$$

Sol.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - 2n^3 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - 2n^3 \left(\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}) \right) \right] = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1 - \frac{x}{3})}}{(\sqrt{x} + x \log x)^3} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{6} + o(x) \right)}{x^{\frac{3}{2}}(1 + o(1))} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 2)e^{(2-x)(x-1)}$$

Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asymptoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescita e decrescenza.

Sol. La funzione è definita ovunque, si annulla solo per $x = 2$, è negativa per $x < 2$ e positiva per $x > 2$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, per cui l'asse x è un asintoto orizzontale. Un calcolo diretto mostra che

$$f'(x) = -e^{(2-x)(x-1)} (2x^2 - 7x + 5)$$

che si annulla per $x \in \{1, \frac{5}{2}\}$, è positiva per $x \in (1, \frac{5}{2})$ ed è negativa altrove. Ne segue immediatamente che la funzione ha un minimo (negativo) in $x = 1$ e un massimo (positivo) in $x = \frac{5}{2}$.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

Sol. Questo esercizio si può fare in vari modi, qui ne discutiamo due:

(a) Si consideri la sostituzione $x^2 - 4x + 5 = (z - x)^2$. Un semplice calcolo mostra che

$$x = \frac{z^2 - 5}{2z - 4} = \varphi(z)$$

e $\varphi' \geq 0$, dunque siamo interessati solo a $z \geq 2$ (ovvero nella regione in cui φ è crescente e differenziabile, quindi un buon cambio di coordinate). Poiché $\varphi(3) = 2$ ne segue che nelle nuove variabili gli estremi di integrazione sono 3 e infinito. Si noti che in questo intervallo $z - x \geq 0$. Inoltre

$$\varphi'(z) = \frac{2(z - x)}{2z - 4}$$

dunque

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x + 5}} &= \int_3^{\infty} \frac{2(z - x)}{(z^2 - 5)(z - x)} dz = \int_3^{\infty} \frac{2}{(z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5})} dz \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_3^L \frac{1}{(z - \sqrt{5})} - \frac{1}{(z + \sqrt{5})} dz \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} + \ln \frac{1 + L^{-1}\sqrt{5}}{1 - L^{-1}\sqrt{5}} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

(b) Cominciamo con la sostituzione $z = x - 2$; si ottiene:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z+2)\sqrt{z^2 + 1}}.$$

A questo punto è naturale usare la sostituzione $z = \sinh y$, cosicché $z^2 + 1 = (\cosh y)^2$. Dunque,

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4x + 5}} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sinh y + 2} dy = \int_0^{\infty} \frac{2e^y}{e^{2y} + 4e^y - 1} dy = \int_1^{\infty} \frac{2}{w^2 + 4w - 1} dw \\ &= \int_1^{\infty} \frac{2}{(w+2-\sqrt{5})(w+2+\sqrt{5})} dw = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

4. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = (2 + y^2)x^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$$

e se ne indichi l'insieme di definizione.

Sol. L'equazione si può integrare separando le variabili

$$\int_0^x \frac{y'(z)}{2 + y^2(z)} dz = \int_0^x z^3 dz.$$

Poiché, per $x \geq 0$, si ha $y'(x) \geq 0$, è possibile cambiare variabile e ottenere, per $x \geq 0$,

$$\frac{x^4}{4} = \int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{1}{2 + y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan \frac{y(x)}{\sqrt{2}} - \arctan 1 \right].$$

Questo implica che

$$y(x) = \sqrt{2} \tan \left[\frac{x^4}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right].$$

L'insieme di definizione della soluzione deve contenere il punto $x = 0$ e deve soddisfare la condizione che l'argomento della tangente non assuma nessuno dei valori in cui la tangente è divergente. Bisogna pertanto richiedere che

$$\frac{x^4}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{x^4}{2\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \in \left(-\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right]^{\frac{1}{4}}, \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right]^{\frac{1}{4}} \right)$$

5. Si studi la continuità della funzione $f(x, y)$ seguente e delle sue derivate parziali rispetto a x e y

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sol. $f(x, y)$ è ovviamente continua e differenziabile in tutti i punti diversi da $(0, 0)$; rimane dunque da studiare solo il comportamento in tale punto. Poiché $|xy^2| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$ e $|\cos((x^2 + y^2)^{-1/2})| \leq 1$, si ha che $|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$, dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, quindi $f(x, y)$ è continua anche in $(0, 0)$. D'altro canto per $(x, y) \neq (0, 0)$ le derivate parziali si possono calcolare con le solite regole ottenendo

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= y^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + x^2 y^2 (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \partial_y f(x, y) &= 2xy \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + xy^3 (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\end{aligned}$$

che sono chiaramente continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mentre le derivate parziali in $(0, 0)$ si debbono calcolare come il limite del rapporto incrementale, ovvero

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0; \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

A questo punto basta notare che, con un argomento simile al precedente, si può provare che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_x f(x, y) = 0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_y f(x, y)$$

per concludere che le derivate sono continue anche in $(0, 0)$.